

И-71-425; 1, 2/12/70

Научно-популярный физико-математический

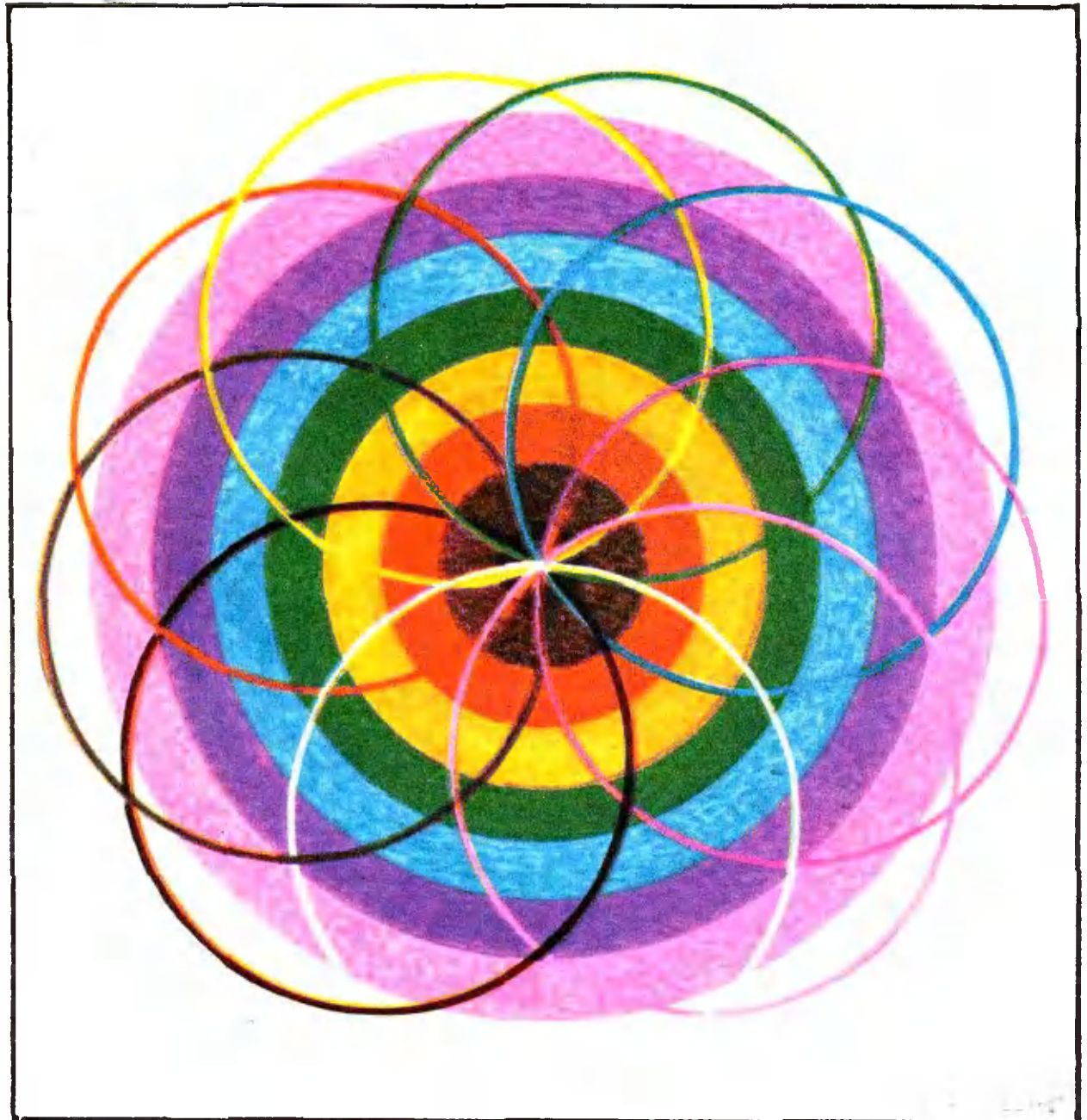
Квант

12

1970

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР

XX $\frac{566}{43}$



Главный редактор — академик И. К. ҚИКОНН. Первый заместитель
главного редактора — академик А. Н. КОЛМОГОРОВ.

**Редакционная
коллегия:**

- | | |
|---------------------|-----------------------------------|
| Л. А. Арцимович, | академик |
| М. И. Башмаков | |
| В. Г. Болтянский, | член-корреспондент АПН СССР |
| И. Н. Бронштейн | |
| Н. Б. Васильев | |
| И. Ф. Гинзбург | академик АПН СССР |
| В. Г. Зубов, | академик |
| П. Л. Капица, | академик |
| В. А. Кириллин, | |
| Г. И. Косоуров | (зам. главного редактора) |
| В. А. Лешковцев | |
| В. П. Лишевский | академик АПН СССР |
| А. И. Маркушевич, | академик |
| М. Д. Миллиончиков, | |
| Н. А. Патрикеева | |
| Н. Х. Розов | |
| А. П. Савин | (зам. главного редактора) |
| И. Ш. Слободецкий | доктор физико-математических наук |
| М. Л. Смолянский, | |
| Я. А. Смородинский, | |
| В. А. Фабрикант, | академик АПН СССР |
| Я. Е. Шнайдер | (ответственный секретарь) |

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
 Главный художник Е. П. Леонов.
 Технический редактор Т. М. Макарова.
 Корректор Т. С. Вайсберг
 Издательство «Наука»
 Главная редакция
 физико-математической литературы
 Москва, В-71, Ленинский проспект. 15

Сдано в набор 24/VIII-70 г. Под. к печати 30/X-70г.
 Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. пе ч. л. 4 условн.
 печ. л. 5.20 Уч.-изд. л. 5.63 Тираж 176000 экз.
 Т-15168 Цена 30 коп. Заказ 1411
 Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
 Комитета по печати при Совете Министров СССР
 г. Чехов Московской области

В НОМЕРЕ:

Изображение пространственных фигур	<i>Н. М. Бескин</i>
2	
О трении	<i>М. И. Каганов,</i>
15	<i>Г. Я. Любарский</i>
Почему устойчив велосипед	
24	
О периоде обращения спутников	<i>Я. А. Смородинский</i>
31	
Задачник «Кванта»	
32	
Задачник «Кванта». Решения	<i>Н. Б. Васильев,</i>
34	<i>И. Ш. Слободецкий</i>
Еще раз об уравнениях с параметрами	<i>А. Я. Маргулис,</i>
46	<i>А. Г. Мордкович,</i>
Как проверить ответ	<i>Б. А. Радунский</i>
50	<i>Р. Г. Минц</i>
Ответы, указания, решения	
56	
Напечатано в 1970 году	
62	
Уголок коллекционера	
3-я стр. обложки	

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Н. М. Бескин

1. Метод параллельных проекций

К сожалению, не существует «пространственного карандаша», кончик которого оставлял бы след в воздухе. Таким карандашом можно было бы «начертить» настоящий куб, обведя его ребра. Плоское же изображение не может быть точной копией пространственной фигуры. Возникает проблема: по каким правилам строить изображение, чтобы оно было похоже на оригинал, то есть чтобы при рассматривании изображения возникало зрительное впечатление, близкое к тому, которое возникает при рассматривании оригинала? Чаще всего для этой цели пользуются проекционными методами. Простейшие из них — метод центральных проекций и метод параллельных проекций.

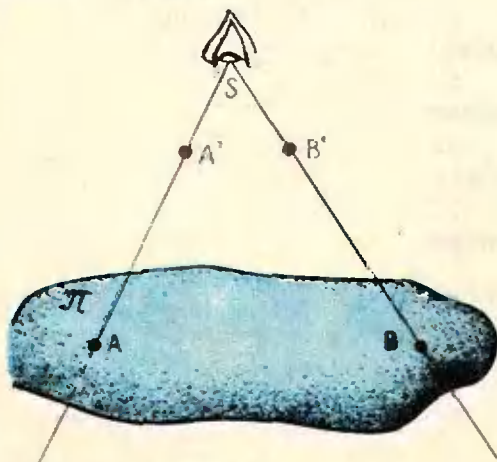


Рис. 1.

Метод центральных проекций ясен из рисунка 1. Берется фиксированная точка S (центр проекции) и фиксированная плоскость π (плоскость проекции), не проходящая через S . Через любую точку A' пространства проводится прямая SA' (проектирующая прямая). Точка A пересечения этой прямой с плоскостью π называется проекцией точки A' . На рисунке 1 показаны проекции двух точек: A' и B' .

Точки оригинала, лежащие на одной проектирующей прямой, имеют одно и то же изображение.

Метод центральных проекций дает самые наглядные изображения, потому что описанное построение воспроизводит процесс зрения: лучи, идущие из точек оригинала (A' , B' , ...) или из их проекций (A , B , ...), совпадают. Таким образом, глазу все равно — рассматривать ли оригинал или его проекцию на плоскость π . (Правда, мы здесь несколько упрощаем: ведь оригинал рассматривается двумя глазами.)

Художники пользуются преимущественно методом центральных проекций.

Метод параллельных проекций отличается от метода центральных проекций только тем, что проектирующие прямые не проходят через фиксированную точку, а параллельны фиксированному направлению (рис. 2). Изображение в параллельной проекции напоминает предмет, рассматриваемый издали: при неограниченном

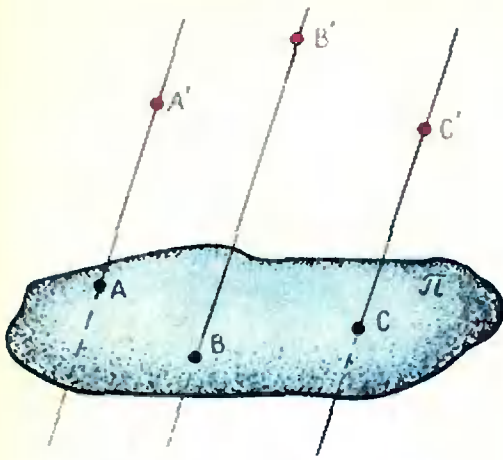


Рис. 2.

удалении глаза от оригинала лучи зрения становятся похожими на параллельные. В этой статье мы расскажем о методе параллельных проекций. Он проще и поэтому всегда используется при изготовлении иллюстративных чертежей в учебной и научной литературе. Мы будем элементы оригинала обозначать буквами со штрихом, а соответственные элементы изображения — теми же буквами без штриха. Например,

точка A' изображается точкой A , прямая m' изображается прямой m .

Перечислим основные свойства параллельных проекций.

Свойство 1. *Изображение прямой линии есть прямая или точка.*

Предположим, что прямая a' не проектирующая (рис. 3). Тогда все проектирующие прямые, проходящие через точки прямой a' , лежат в одной плоскости. Пересечение этой плоскости с плоскостью π есть прямая.

Если же прямая a' проектирующая, то все ее точки имеют одно и то же изображение, то есть прямая изображается точкой.

Следующие два свойства докажете самостоятельно.

Свойство 2. *Параллельные прямые изображаются параллельными прямыми или отдельными точками.*

Свойство 3. *Отношение, в котором любая точка отрезка делит*

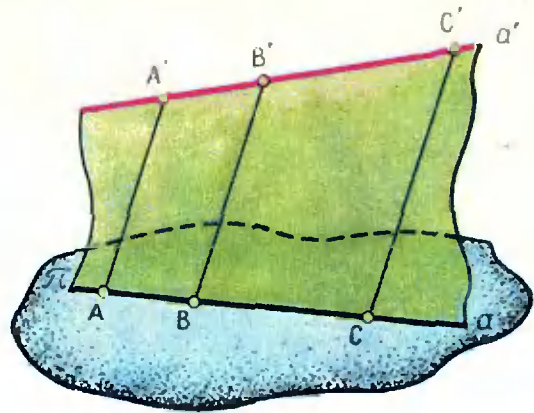


Рис. 3.

этот отрезок, в изображении и в оригинале одинаково:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'};$$

в частности, *середина отрезка изображается серединой.*

2. Изображение плоских фигур

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в плоскости чертежа изображаются при параллельном проектировании фигуры, лежащие в другой плоскости.

Теорема 1. *Любой данный треугольник может быть изображен, с точностью до подобия, произвольным треугольником. Иными словами*

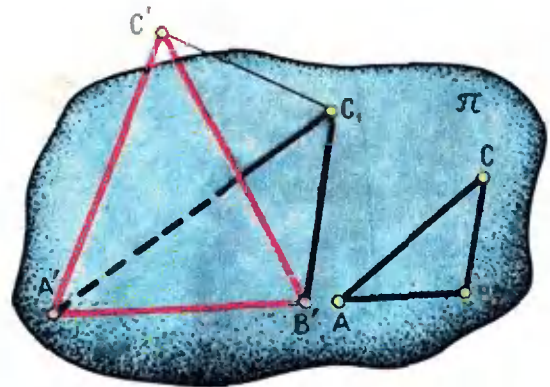


Рис. 4.

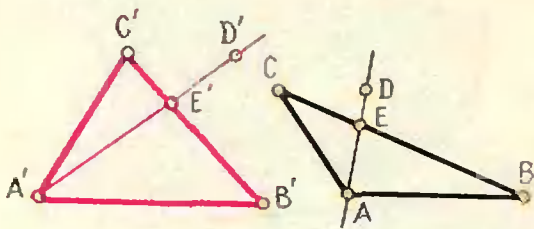


Рис. 5, а.

ми, можно начертить какой-угодно треугольник ABC и утверждать, что он подобен изображению данного треугольника $A'B'C'$.

Доказательство. Нам даны два треугольника: оригинал $A'B'C'$ и образец ABC . Построим на стороне $A'B'$ треугольник $A'B'C_1$ (рис. 4), подобный треугольнику ABC и расположенный в некоторой плоскости π , отличной от плоскости треугольника $A'B'C'$. Примем, далее, $C'C_1$ за направление проектирования. Тогда проекцией треугольника $A'B'C'$ на плоскость π окажется треугольник $A'B'C_1$, подобный треугольнику ABC .

Теорема 2. Если дано изображение треугольника $A'B'C'$, то тем самым однозначно определено изображение каждой точки, лежащей в плоскости этого треугольника.

Доказательство. Пусть $A'B'C'$ — оригинал (рис. 5, а), а ABC — изображение (рис. 5, б). Возьмем в плоскости треугольника $A'B'C'$ произвольную точку D' и соединим ее с любой вершиной треугольника, например с A' . Пусть E' — точка пересечения прямой $A'D'$ с противоположной стороной $B'C'$ (безразлично, находится ли E' внутри отрезка $B'C'$ или на его продолжении). Изображение точки E' можно найти: оно должно делить отрезок BC в таком же отношении, в каком E' делит отрезок $B'C'$, то есть

$$\frac{BE}{EC} = \frac{B'E'}{E'C'}$$

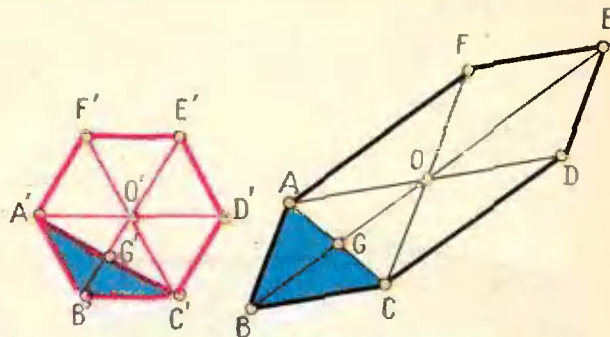


Рис. 6, а.

Рис. 6, б.

Точка D должна лежать на прямой AE . Ее положение на этой прямой определяется из пропорции

$$\frac{AD}{DE} = \frac{A'D'}{D'E'}$$

Из доказанных двух теорем вытекает практическое правило для построения изображений плоских фигур: надо выбрать в составе фигуры F' любые три точки, не лежащие на одной прямой, и изобразить их произвольными тремя точками общего положения. На этом произвол кончается: изображения всех остальных точек надо строить. Другими словами, данный треугольник можно изобразить произвольно, а данный четырехугольник уже нельзя.

Пример 1. Изображение правильного шестиугольника.

Обозначим данный правильный шестиугольник (оригинал) через $A'B'C'D'E'F'$, а его центр — буквой O' (для удобства оригинал показан на рисунке 6, а). Построим теперь изображение этого шестиугольника. Изобразим треугольник $A'B'C'$ произвольно (рис. 6, б). Точка G' есть середина отрезка $A'C'$. Следовательно, точка G тоже должна быть серединой отрезка AC . Теперь можно провести прямую BG . На ней можно построить точки O и E , пользуясь соотношениями $BO = 2BG$, $BE = 4BG$. Далее, $CD \parallel BG$ и $AF \parallel BG$. Точку D можно найти разными способами: 1) откладывая $CD = BO$, 2) проводя

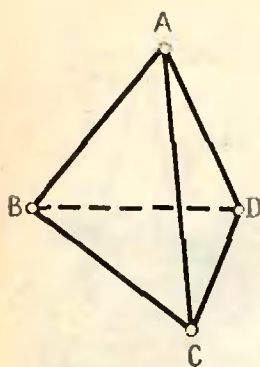


Рис. 7, а.

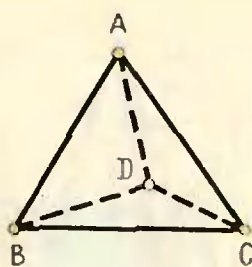


Рис. 7, б.

$ED \parallel AB$, 3) проводя прямую AO . Аналогично строится точка F .

В качестве другого примера докажете самостоятельно, что квадрат можно изобразить произвольным параллелограммом.

Отметим в заключение, что изображение окружности есть эллипс.

3. Теорема Польке — Шварца и изображение пространственных фигур

Мы знаем, что при изображении плоских фигур треугольник играет особую роль. Аналогичное положение возникает при изображении пространственных фигур, только вместо треугольника используется тетраэдр. Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, мы введем следующее определение.

Полным четырехугольником называется плоская фигура, состоящая из четырех точек общего положения (то есть никакие три из них не лежат на одной прямой) и шести отрезков, соединяющих эти точки попарно.

Теорема 3 (теорема Польке — Шварца)* *Любой данный тетраэдр может быть, с точностью до подобия, изображен произвольным полным четырехугольником (на рисунке 7, а*

*) Польке доказал эту теорему в 1853 году для равнобедренного прямоугольного тетраэдра (с равными боковыми ребрами и прямыми плоскими углами при вершине). Шварц в 1864 году доказал ее для произвольного тетраэдра.

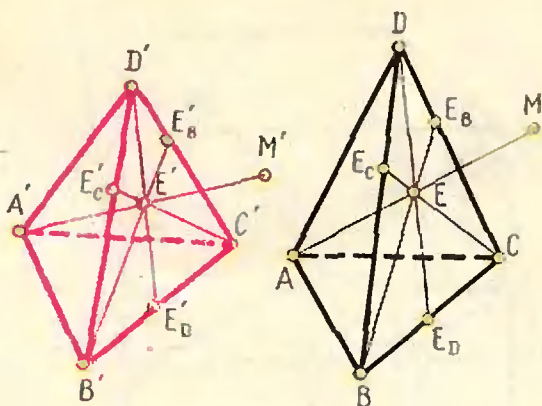


Рис. 8, а.

Рис. 8, б.

четыреугольник $ABCD$ выпуклый, на рисунке 7, б — невыпуклый).

Мы примем эту теорему без доказательства.

Пунктир используется в изображении пространственных фигур для обозначения невидимых линий (предполагается, что грани тетраэдра непрозрачны).

Теорема 4. *Если дано изображение тетраэдра $A'B'C'D'$, то тем самым определено изображение каждой точки пространства.*

Доказательство. Пусть $A'B'C'D'$ — оригинал (рис. 8, а), а $ABCD$ — его изображение на плоскости (рис. 8, б). Пусть, кроме того, в пространстве дана произвольная точка M' . Покажем, как построить ее изображение. Соединим M' с какой-нибудь вершиной тетраэдра, например с A' , и отметим точку пересечения E' прямой $A'M'$ с противоположной гранью $B'C'D'$ (точка E' вовсе не должна обязательно находиться внутри треугольника $B'C'D'$).

Теперь перейдем к изображению. Изображение точки E' можно построить: ведь эта точка лежит в плоскости треугольника $B'C'D'$, изображение которого дано. Далее проводим прямую AE и на ней строим точку M , удовлетворяющую условию

$$\frac{AM}{ME} = \frac{A'M'}{M'E'}$$

Пример 2. Изображение куба. Три ребра куба, выходящие из

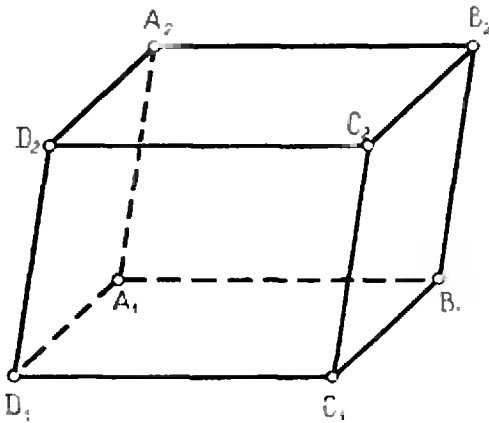


Рис. 9.

одной точки, определяют тетраэдр. По теореме Польке—Шварца он может быть изображен произвольным четырехугольником. Таким образом, изображая куб (рис. 9), мы можем точки A_1 , B_1 , D_1 и A_2 отметить произвольно. Остальная часть изображения достраивается исходя из того, что параллельные ребра куба и на чертеже должны быть параллельны.

Большинство людей думает, что рисунок 9 не всегда может служить изображением куба и что надо особым образом выбирать углы составляющих его параллелограммов и отношения отрезков. Объясняется это тем, что для нас наиболее привычными являются ортогональные проекции, полученные в том случае, когда проектирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций. Здесь же речь идет о произвольных («косых») параллельных проекциях.

Пример 3. Изображение правильной четырехугольной пирамиды.

Основание (квадрат) можно изобразить произвольным параллелограммом. Кроме того, согласно теореме Польке—Шварца можно изобразить произвольно одно боковое ребро, то есть отметить произвольно вершину пирамиды. Если нужно провести высоту, то следует соединить вершину с точкой пересечения диагоналей основания.

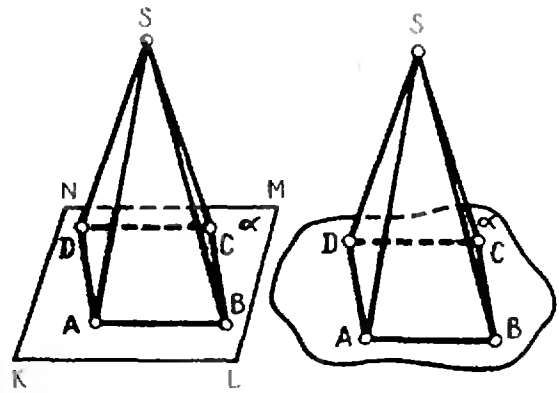


Рис. 10, а.

Рис. 10, б.

В учебниках широко распространено обыкновенное изображение плоскости (точнее говоря, «кусочек плоскости») в виде параллелограмма, неявно предполагая при этом, что оригинал — прямоугольный кусочек плоскости. В этом случае неизбежно расходится часть произвола, имеющегося в нашем распоряжении. Если же мы об этом забываем и в дальнейшем пользуемся теоремой Польке—Шварца, то приходим к грубым ошибкам. Вот пример. На рисунке 10, а изображена правильная четырехугольная пирамида, стоящая на плоскости. Отдельно взятое изображение $SABCD$ построено правильно, но рисунок 10, а в целом грубо ошибочен. Изобразив прямоугольный кусочек плоскости параллелограммом $KLMN$, мы уже частично использовали произвол, предоставляемый теоремой Польке—Шварца, и не имеем права изображать квадрат $A'B'C'D'$ произвольным параллелограммом. На рисунке 10, а ∇LKN и ∇DAB изображают прямые углы. $AB \parallel KL$, следовательно, должно быть $AD \parallel KN$. Раз этого нет, рисунок 10, а ошибочен.

Поскольку прямоугольность кусочка плоскости не имеет никакого значения при изучении свойств стоящей на ней пирамиды, нет смысла связывать себя условием, что ∇LKN — изобра-

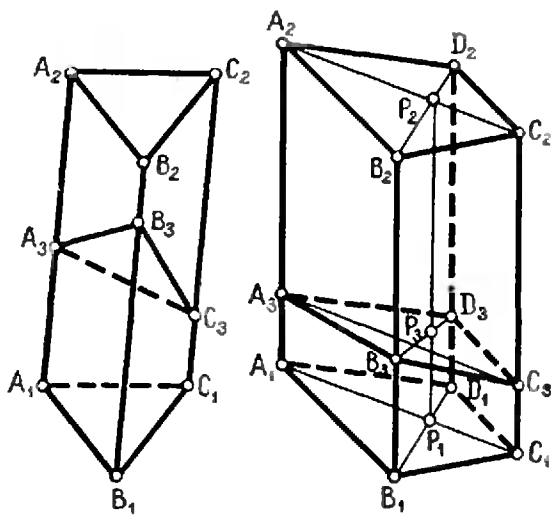


Рис. 11, а.

Рис. 11, б.

жение прямого угла, и тем самым усложнять дальнейшие построения. Вот почему целесообразно изображать плоскость куском «с оборванными краями» (рис. 10, б). Такое изображение плоскости не связывает нас никакими условиями. Изображая четырехугольную пирамиду, поставленную на эту плоскость, мы имеем такую же свободу действий, как при изображении той же пирамиды в пустом пространстве.

4. Сечения многогранников

Теперь мы будем рассматривать изображения, встречающиеся при изучении стереометрии.

Пример 4. На рисунке 11, а изображено плоское сечение треугольной призмы.

Оно «построено» очень просто: на ребрах призмы взяты произвольные точки A_3, B_3, C_3 и соединены отрезками прямых. На рисунке 11, б тот же «метод» применен к построению сечения четырехугольной призмы.

Рисунок 11, а правилен, а на рисунке 11, б допущена ошибка (весьма распространенная!). В самом деле, плоскость определяется тремя точками. Поэтому, изображая плоское сечение треугольной призмы, мы можем взять точки на ее ребрах произвольно. С четырехугольной призмой так поступить нельзя. Отметив про-

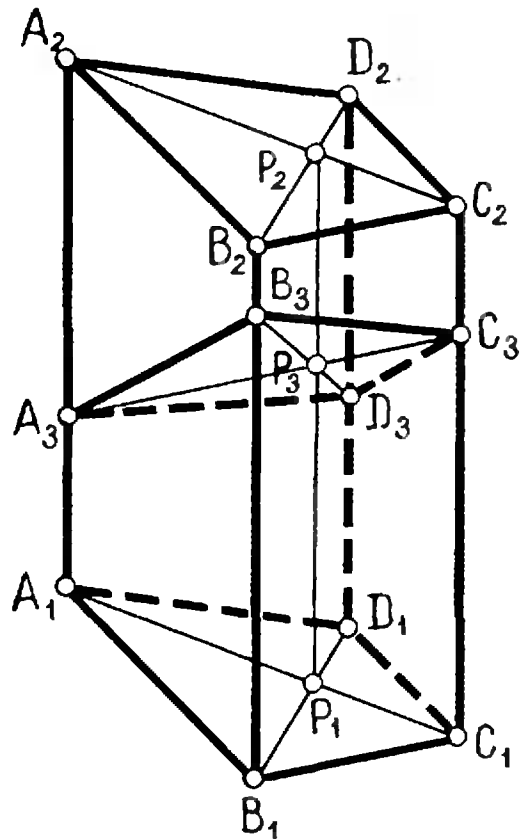


Рис. 12.

извольно точки A_3, B_3, C_3 , мы уже определили секущую плоскость, и точка ее пересечения с четвертым ребром призмы не может быть взята произвольно.

Покажем, как правильно найти точку пересечения секущей плоскости с четвертым ребром.

Плоскость, проходящая через ребра *) A_1A_2 и C_1C_2 , пересекает плоское сечение $A_3B_3C_3D_3$ по диагонали A_3C_3 , а плоскость, проходящая через ребра B_1B_2 и D_1D_2 — по диагонали B_3D_3 . Прямая пересечения этих двух плоскостей параллельна ребрам призмы. Следовательно, во всех плоских сечениях призмы точки пересечения диагоналей лежат на прямой, параллельной ребрам призмы. На рисунке 11, б отмечены точки P_1 и P_2 пересечения диагоналей оснований; прямая P_1P_2 параллельна ребрам призмы. Точка P_3 не лежит на этой прямой —

*) Не забудьте, что элементы оригинала обозначаются буквами со штрихами.

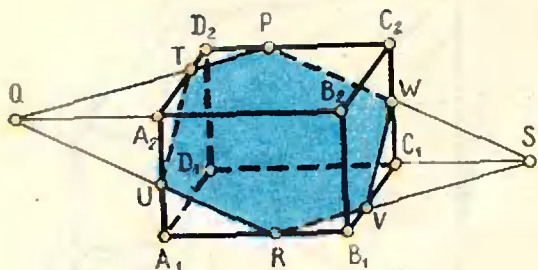


Рис. 13.

следовательно, рисунок неправилен. Это означает, что изображенный на нем четырехугольник $A_3B_3C_3D_3$ — неплоский. Человек с натренированным глазом, например, художник, заметит это сразу, без всяких построений.

Это свойство позволяет не только проверить правильность чертежа, но и построить плоское сечение четырехугольной призмы. Отметим произвольно точки A_3, B_3, C_3 (рис. 12). Строим точки P_1 и P_2 и проводим прямую P_1P_2 (она окажется параллельной прямой A_1A_2). Проводим прямую A_3C_3 . Находим точку P_3 пересечения A_3C_3 и P_1P_2 . Проводим B_3P_3 . Точка пересечения B_3P_3 с D_1D_2 и есть искомая.

Изображение плоских сечений многогранников требует использования только двух правил:

1) Если плоскости β' и γ' пересекаются по прямой l' , а плоскость α' пересекает их соответственно по прямым b' и c' , то b' и c' либо пересекаются в точке, лежащей на l' , либо параллельны l' .

2) Если плоскости β' и γ' параллельны, а плоскость α' пересекает их соответственно по прямым b' и c' , то b' и c' параллельны.

Пример 5. Изображение плоского сечения параллелепипеда.

Проводим изображения линий сечения RQ и QP . Точка их пересечения должна лежать на прямой A_2B_2 , в остальном прямые PQ и QR произ-

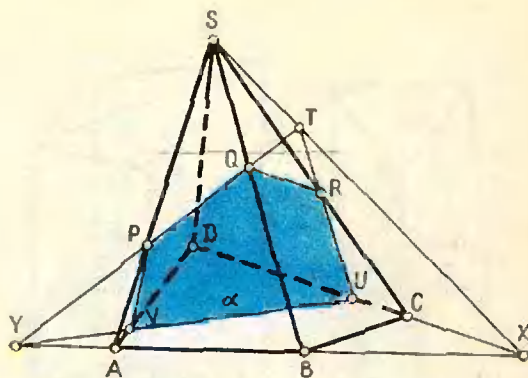


Рис. 14.

вольны. Далее проводим $RS \parallel QP$ и $PS \parallel QR$.

На рисунке 13 прямые PQ и QR проведены так, что точка Q попала вне отрезка A_2B_2 . Отмечаем точки $T \equiv PQ \times A_2D_2$ и $U \equiv QR \times A_1A_2$ и соединяем U и T). Проводим $RS \parallel \parallel QP$ и $PS \parallel QR$. Ясно, что точка S должна лежать на прямой C_1D_1 . Если эта точка попадала на продолжение отрезка C_1D_1 , то соединяем точки $V \equiv RS \times B_1C_1$ и $W \equiv PS \times C_1C_2$. Разберите самостоятельно случай, когда точка Q лежит внутри отрезка A_2B_2 .

Пример 6. Изображение плоского сечения четырехугольной пирамиды (рис. 14).

Проводим звенья PQ и QR произвольно. От точки R надо вести линию сечения по задней грани. Плоскости передней и задней грани пересекаются по прямой $S'X'$. Изображение этой прямой легко получить, построив точку $X \equiv AB \times CD$. Следы секущей плоскости α' на передней и задней гранях должны пересекаться на $S'X'$. Находим точку $T \equiv PQ \times SX$ и проводим TR . Отмечаем отрезок этой прямой RU , оказавшийся внутри треугольника SCD . AB изображает линию пересечения передней и нижней граней. Строим точку $Y \equiv AB \times PQ$ и находим точку $V \equiv AD \times UY$.

* Запись $M \equiv AB \times CD$ означает: « M есть точка пересечения прямых AB и CD », а $m \equiv A \times B$ — « m есть прямая, определяемая точками A и B ».

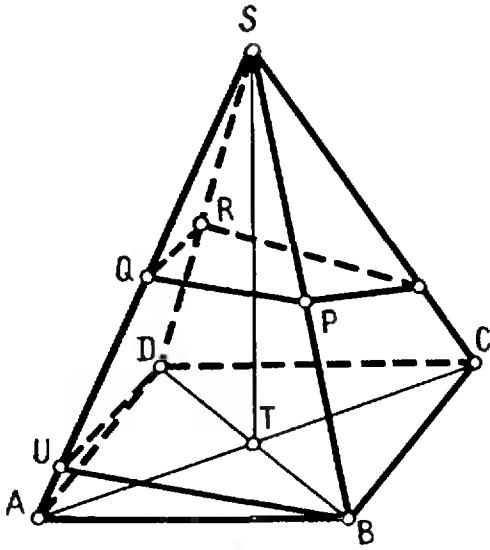


Рис. 15.

Пятиугольник $PQRUV$ и есть изображение искомого сечения.

Пример 7. Правильная четырехугольная пирамида $S'A'B'C'D'$ пересекается плоскостью, перпендикулярной ребру $S'A'$.

Основание правильной четырехугольной пирамиды — квадрат. Его можно изобразить произвольным параллелограммом (рис. 15). Кроме того, согласно теореме Польке — Шварца можно еще произвольно изобразить какое-нибудь боковое ребро, например $S'A'$.

Таким образом, будет произвольно изображен тетраэдр $S'A'B'C'$. Однако теорема Польке — Шварца утверждает, что можно произвольно изобразить *данный* тетраэдр, а в нашей задаче тетраэдр $S'A'B'C'$ не дан, потому что не задана длина бокового ребра (или, вместо него, высоты). В планиметрии, если треугольник начерчен, то он дан (в неискаженном виде), и можно построить в нем высоты, биссектрисы и любые элементы. В стереометрии же плоское изображение фигуры не определяет ее однозначно (метрически). Добавим еще одно условие, например:

$$S'T' = 2A'B'.$$

Только теперь задача станет определенной.

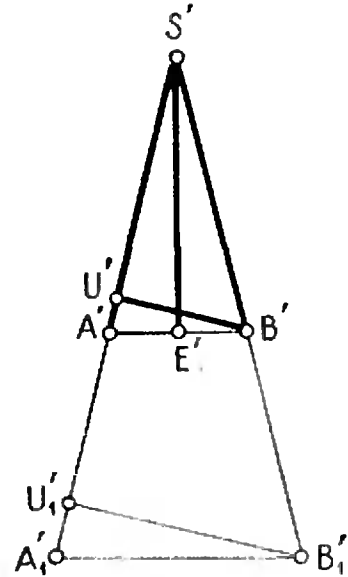


Рис. 16.

На рисунке 16 треугольник $S'A'B'$ изображен в натуральном виде, то есть без искажения. Точка E' — середина $A'B'$, $A'B' = a$, $S'E' = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Из вершины B' проведена высота $B'U'$. Теперь надо перенести точку U' на изображение. Отношение $\frac{S'U'}{U'A'}$

равно соответствующему отношению в оригинале. Применим метод подобия. Отложим на рисунке 16 $S'A_1' = SA$. Изменяя подобно весь чертеж, получим треугольник $S'A_1'B_1'$ и в нем высоту $B_1'U_1'$. Остается перенести размер $S'U_1'$ на рисунок 15, то есть $SU = S'U_1'$.

Теперь $S'A' \perp U'B'$ и $S'A' \perp U'D'$. Следовательно, $S'A'$ перпендикулярно плоскости $B'U'D'$. Эту плоскость можно переместить параллельно самой себе. При этом на рисунке 15 изображения UB и UD следов плоскости заменятся параллельными прямыми PQ и QR . Это сечение дальше достраивается по правилам, изложенным в п. 2.

5. Круглые тела

Цилиндр изображен на рисунке 17. Оба основания изображаются одинаковыми эллипсами.

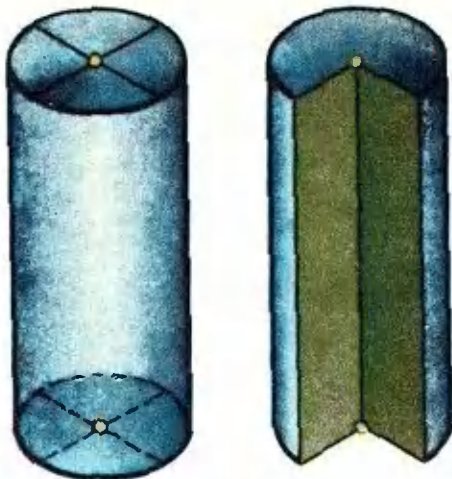


Рис. 17.

В каждом эллипсе показаны два диаметра: в оригинале они перпендикулярные, а на изображении — сопряженные (см. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс», Квант № 9).

Основание конуса также изображается эллипсом. В школьной практике часто встречается следующая ошибка: крайние образующие используются для изображения осевого сечения, причем предполагается, что они касаются эллипса в концах большой оси (рис. 18, а). Это нелепость. Если из точки S провести касательные к эллипсу и соединить точки касания A и B , то прямая AB не пройдет через центр эллипса. Однако некоторые

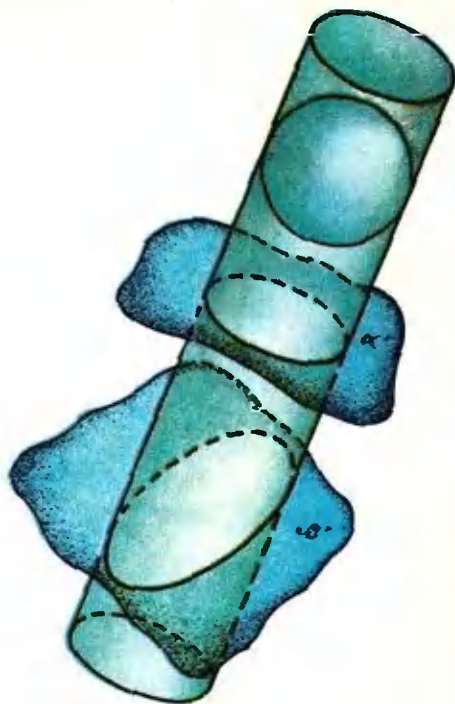


Рис. 19.

«чертежники» проводят ее через центр насильственно. Рисунок 18, б — правильный. Одна из точек касания, например A , соединяется с центром O , и на эллипсе отмечается точка C , диаметрально противоположная A . Треугольник SAC есть изображение осевого сечения.

Для изображения осевого сечения вовсе не обязательно использовать

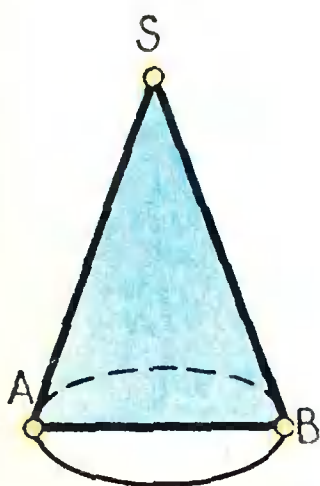


Рис. 18, а.

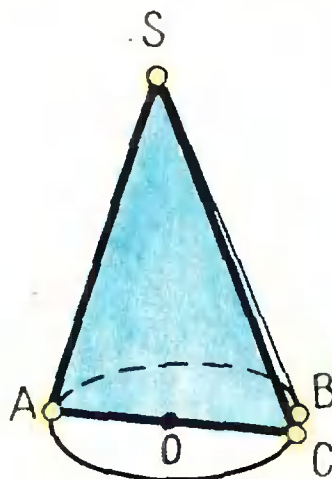


Рис. 18, б.

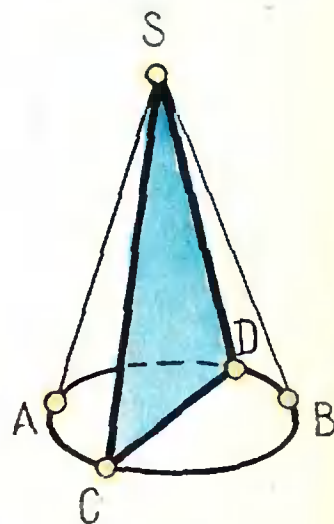


Рис. 18, в.

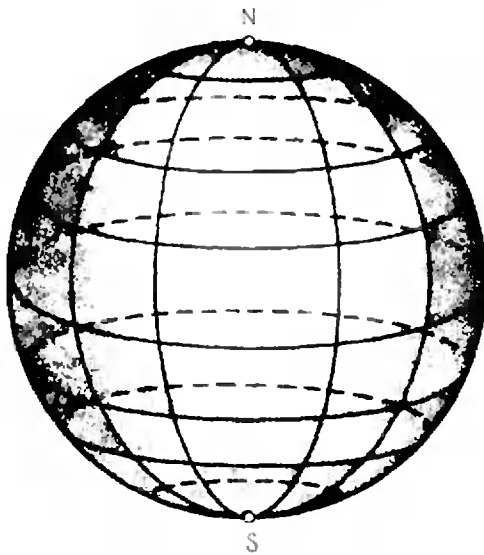


Рис. 20.

одну из крайних образующих. На рисунке 18, в показан другой вариант изображения конуса с осевым сечением.

Шар принято изображать в ортогональной проекции. Причина этого следующая. При проектировании шара проектирующие прямые образуют круговой цилиндр, касающийся сферы (рис. 19). Плоскость α' , перпендикулярная образующим цилиндра, сечет цилиндр по кругу, а плоскость β' — по вытянутому эллипсу, то есть проекция шара на α' есть круг, а на β' — вытянутый эллипс.

Изображение шара, при котором его контур — вытянутый эллипс, кажется не наглядным. Большинство людей скажет, что оно «не похоже на шар». Поэтому принято при проектировании шара использовать ортогональную проекцию.

В школьной практике встречается ошибочное изображение шара (рис. 20). Для краткости описания мы будем пользоваться географическими терминами «экватор», «меридиан», «Северный полюс», «Южный полюс», как будто это Земной шар. На рисунке 20 экватор изображен эллипсом, нижняя часть которого соответствует видимой части экватора. Это означает, что проектирующие лучи наклонены к плоскости экватора и пересекают ее

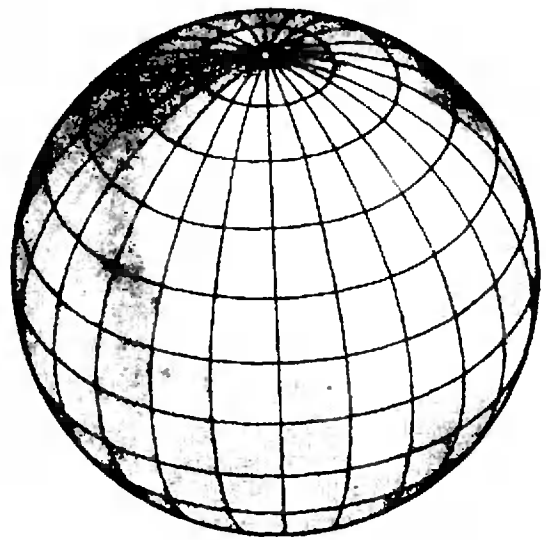


Рис. 21.

сверху вниз (считаем, что они исходят из глаза наблюдателя). Но тогда изображения полюсов не могут находиться на контуре изображения. Северный полюс должен находиться ниже (то есть он виден вместе с некоторой окрестностью), а Южный полюс находится на невидимой задней части сферы (рис. 21).

Если же исходить из того, что полюсы находятся на контуре, то проектирующие лучи должны быть параллельными плоскости экватора. Тогда

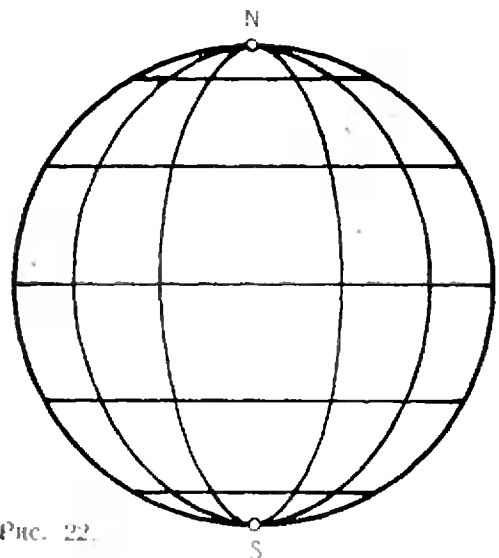


Рис. 22.

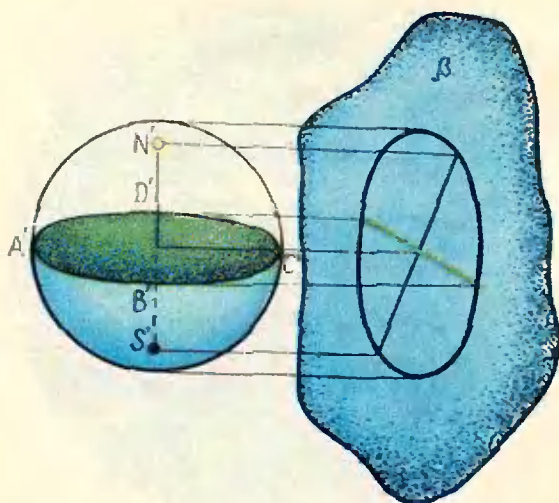


Рис. 23, а.

да экватор будет изображаться отрезком (рис. 22).

Правильное изображение шара строится так. Экватор и меридианы изображаются эллипсами, причем все меридианы проходят через две точки N и S . Остается только выяснить связь между изображением экватора и положением точек N и S .

Представим себе оригинал. Проведем экваториальное сечение (круг $A'B'C'D'$) и перпендикулярный ему диаметр $N'S'$ (земная ось). Вообразим, далее, плоскость β' , перпендикулярную $A'C'$ и (для удобства) проходящую вне шара (рис. 23, а). Шар вместе с экваториальным сечением и осью $N'S'$ спроектируем ортогонально на плоскость β' . Шар спроектируется в круг, а система $(A'B'C'D', N'S')$ — в два перпендикулярных диаметра этого круга.

Если фигуру слева (рис. 23, а) вращать вокруг $A'C'$, то круг на плоскости β' будет оставаться на месте, а крест из двух его перпендикулярных диаметров будет вращаться вокруг центра.

Рисунок 23, б дает ключ к решению вопроса о том, как связаны изображение экватора с изображениями полюсов. Диаметр PQ определяет малую ось эллипса, а перпендикуляр-

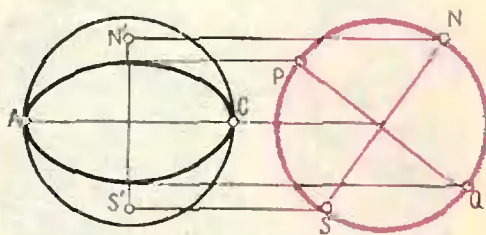


Рис. 23, б.

ный ему NS — положение полюсов N' и S' . Руководствуясь этим рисунком, можно решить следующие две задачи:

- 1) Дано изображение экватора в виде эллипса. Найти полюсы.
- 2) Даны полюсы. Построить изображение экватора.

После того как экватор и полюсы изображены, легко вычертить координатную сетку (меридианы и параллели) на шаре (рис. 24). Меридианы изображаются эллипсами, проходя-

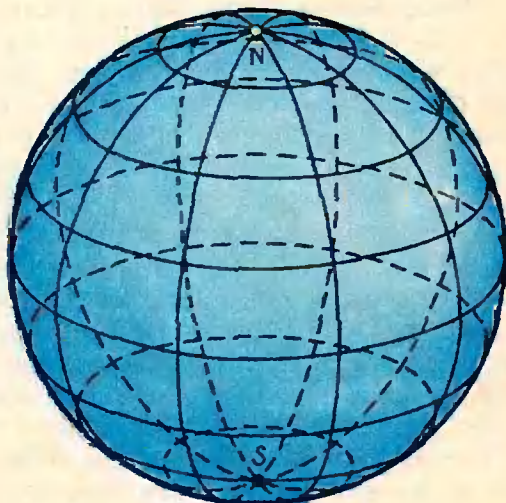


Рис. 24.

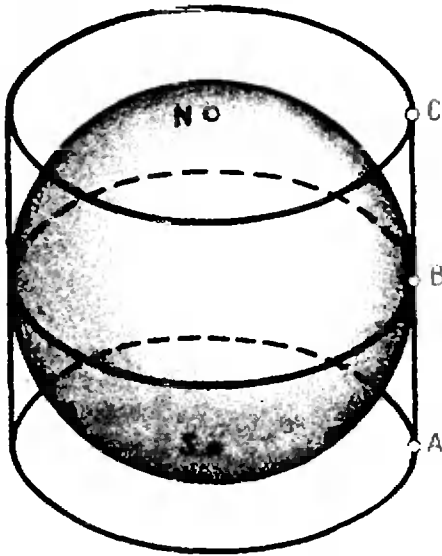


Рис. 25.

щими через точки M и S . Параллели изображаются подобными эллипсами, касающимися контура шара.

При решении стереометрических задач чертеж играет вспомогательную роль, и нет смысла тратить на его выполнение больше труда, чем на решение самой задачи. Поэтому мы рекомендуем читателю в основном чертить на глаз. Однако дадим некоторые общие рекомендации, выполнение которых позволит избежать ошибок.

Изображение шара сложнее, чем многогранников, цилиндра и конуса. Поэтому рекомендуется, выполняя чертежи с участием шара, начинать с шара, а затем пристраивать к нему остальные фигуры.

Если шар вписан в цилиндр (рис. 25), то боковая поверхность цилиндра касается шара по большому кругу, например по экватору. Точка B — на экваторе, $AB = BC$, $AC = NS$. Все три эллипса (экваториальное сечение и основания цилиндра) одинаковы.

Если цилиндр вписан в шар (рис. 26), то следует помнить, что его основания — одинаковые по размеру параллельные круги.

Если шар вписан в призму (рис. 27), то большой круг (например, эк-

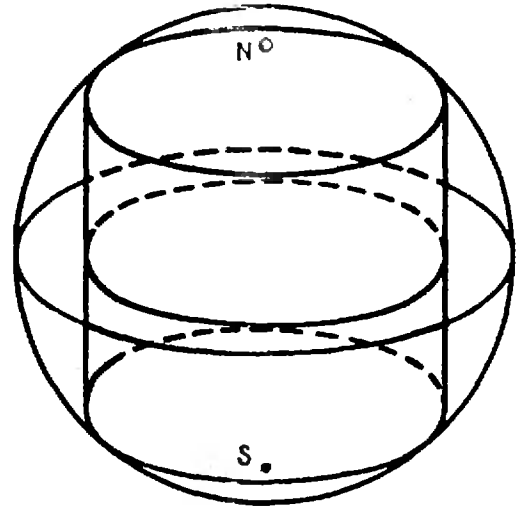


Рис. 26.

ватор) вписан в среднее сечение призмы (сечение плоскостью, параллельной основаниям и проходящей посередине между ними). Поэтому рисунок рекомендуется выполнять в такой последовательности: сначала изобразить шар, затем описать многоугольник около экватора (на рисунке 27 около экватора призмы ромб), наконец, достроить призму по условиям: $AC = NS$, $AB = BC$.

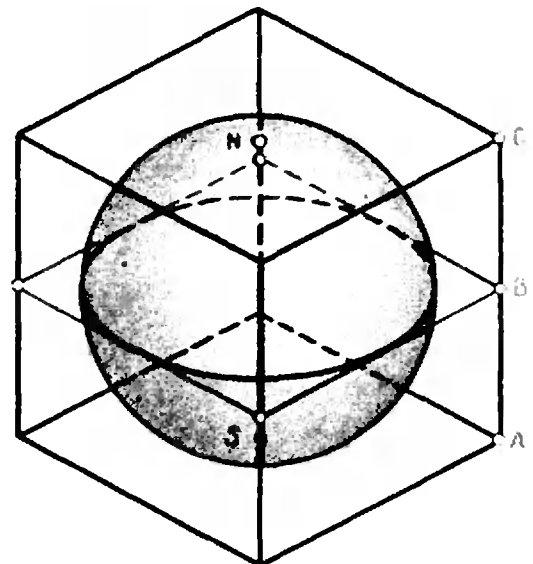


Рис. 27.

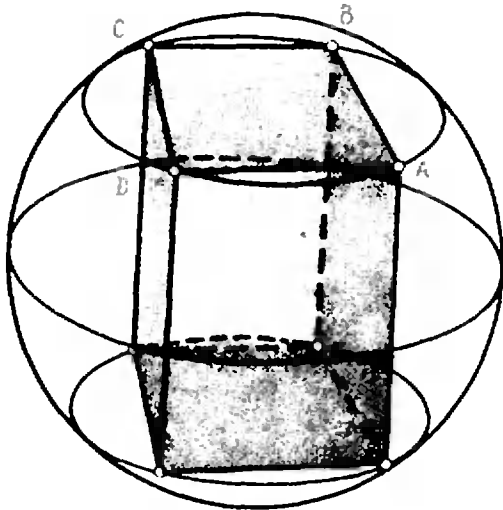


Рис. 28.

Чтобы изобразить призму, вписанную в шар (рис. 28), надо прежде всего вписать многоугольник в какой-нибудь параллельный круг. Остальное ясно.

Если шар вписан в пирамиду (рис. 29), то точки касания боковых граней находятся на одинаковых расстояниях от вершины пирамиды и, следовательно, лежат на одном параллельном круге, плоскость которого перпендикулярна $T'O'$ (O' — центр шара, T' — вершина пирамиды). Чертить можно в такой последовательности: изобразить шар, затем взять

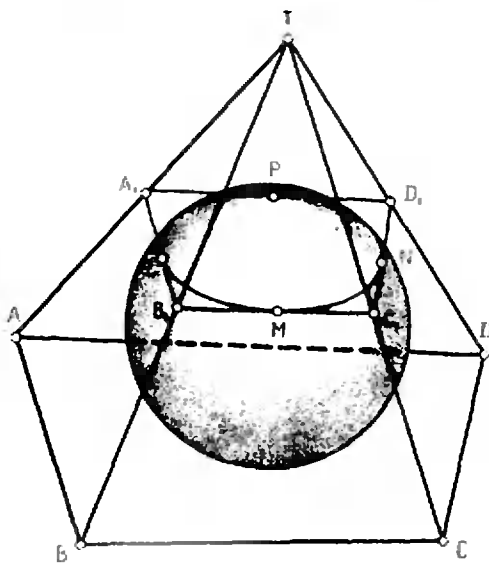


Рис. 29.

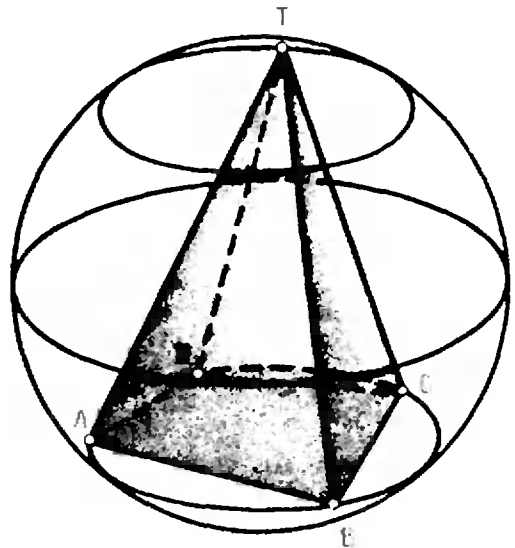


Рис. 30.

какой-нибудь параллельный круг и описать около него многоугольник (например, $A_1B_1C_1D_1$). После этого к меридианам, проходящим через точки касания L, M, N, P , провести касательные в этих точках (можно на глаз). Они пересекутся в одной точке T , которая и изображает вершину пирамиды. Пусть плоскость нижнего основания параллельна плоскости $A_1B_1C_1D_1$ (если это не так, то задача усложнится, и в этой статье мы ее рассматривать не будем), тогда остается достроить пирамиду, руководствуясь пропорциями

$$\frac{TS}{TO_1} = \frac{TA}{TA_1} = \frac{TB}{TB_1} = \frac{TC}{TC_1} = \frac{TD}{TD_1}$$

(S' — Южный полюс, O_1 — центр параллельного круга, вписанного в $A_1B_1C_1D_1$).

Если шар описан около пирамиды (рис. 30), то основание пирамиды вписано в какой-нибудь параллельный круг, а вершина — любая точка сферы.

От редакции. В 1971 году в серии «Популярные лекции по математике» выйдет брошюра Н. М. Бескина «Изображение пространственных фигур», в которой эти вопросы будут изложены более подробно.

О ТРЕНИИ

М. И. Каганов
Г. Я. Любарский,

В чем ошибка Аристотеля

Аристотеля обычно вспоминают, чтобы покритиковать. И то у него неправильно, и это. Особенно достается ему в курсе механики. Ведь хорошо известно, что силе пропорционально ускорение тела, а тело, предоставленное само себе, движется с постоянной скоростью. А Аристотель утверждал нечто другое: скорость тела пропорциональна действующей на него силе. И если не прикладывать силы, то тело остановится. Правда, наш каждодневный опыт скорее подтверждает утверждения Аристотеля, чем Ньютона, два закона которого мы сформулировали выше. Действительно, чтобы тело двигалось, его надо толкать или тянуть, то есть прикладывать к нему силу, а как только приложенная сила исчезает, тело останавливается. Утверждение Аристотеля, на первый взгляд, лучше согласуется с наблюдаемыми явлениями, чем законы Ньютона. Поэтому-то так трудно было бороться с авторитетом Аристотеля.

Согласие между теорией (законами Ньютона) и экспериментом (наблюдениями за движущимися предметами) обнаруживается, если учесть силы трения. Когда, как казалось Аристотелю, на тело ничто не действует и поэтому (!) оно останавливается, на него в действительности действует сила трения, которая и тормозит движение.

Трение и атомы

Что же такое сила трения? Какова ее природа? Чаще всего мы вспоминаем о ней, изучая работу механиков, задумываясь о скольжении

санок по снежному насту или лодки по водной поверхности. В общих чертах понять, что происходит при соприкосновении двух тел, пожалуй, можно. Их атомы (полозьев и снега или подшипника и обоймы) взаимодействуют друг с другом*). При движении атомы одного тела пытаются увлечь атомы другого. Если им удается это, то одно из них или оба разрушаются. Мы говорим обычно — стираются. Давайте, чтобы не затруднять рассмотрение, пренебрежем стиранием. При не очень больших скоростях и достаточно твердых деталях это вполне допустимо. Итак, атомам одного тела не удастся увлечь атомы другого тела. Что же все-таки происходит? Атомы твердого тела (кристалла) располагаются в определенных позициях в положениях равновесия. Правда, термин «располагаются» несколько условен, так как атомы все время находятся в движении: они совершают малые колебания около положений равновесия. Интенсивность этих колебаний определяется температурой. Чем больше температура, тем больше энергия и амплитуда колебаний атомов. Атомы кристалла взаимодействуют друг с другом. Изменение движения одного ато-

*) Несколько туманное слово «взаимодействуют» означает, что атомы либо притягиваются друг к другу, либо отталкиваются. В действительности, и притягиваются, и отталкиваются. Вдали — притягиваются, а вблизи — отталкиваются. Надо только помнить, что масштабы в мире атомов — это ангстремы ($1\text{ \AA} = 10^{-8}\text{ см}$). «Вдали» означает расстояние много больше 1 \AA , вблизи — порядка 1 \AA . При соприкосновении атомы разных тел находятся друг от друга на расстояниях, значительно превышающих 1 \AA .

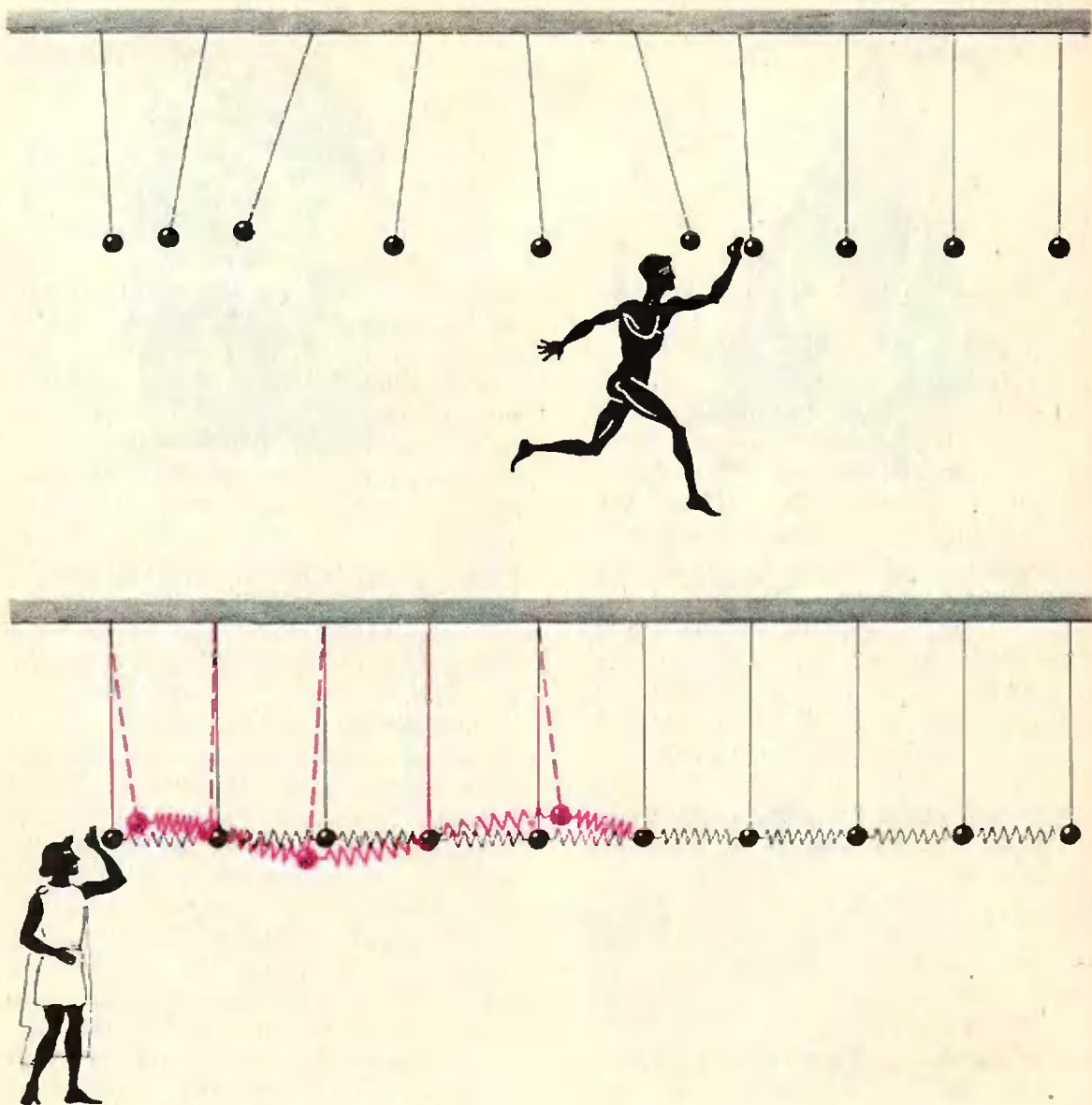


Рис. 1.

ма или группы атомов передается соседним...

Когда одно тело движется относительно другого, касаясь его, атомы этих тел «цепляются» и раскачивают друг друга. Если не бояться вульгаризации, то этот процесс можно представить себе так: человек бежит мимо висящих рядом маятников и раскачивает их. Или еще лучше: маятники связаны между собой. Качнув один или несколько, заставляют двигаться все остальные (рис. 1).

Колебания атомов, расположенных на поверхности тела, передаются атомам, расположенным в глубине. Передача энергии от поверхности в глубину тела — сложный процесс, не до конца прослеженный до сих пор (хотя общие черты его понятны). Пути передачи энергии существенно зависят от того, что представляет собой твердое тело. Например, в металлах энергию могут уносить электроны. Но, каков бы ни был путь отвода энергии от поверхности, в конечном

счете трение одного тела о другое приводит к повышению температуры. Кроме того, в процессе трения происходят изменения структуры трущихся поверхностей. Их необходимо учитывать при желании понять все явления, сопровождающие трение*). Однако, пока мы не пытаемся построить количественную теорию, нам не очень важно точно знать, что происходит в твердом теле. Существенно понять: энергия движущегося тела частично тратится на возбуждение движения атомных частиц, из которых состоят твердые тела.

Можно сказать, что трущиеся тела «работают», только работа эта делается впустую — энергия тратится на нагрев тела, которое чаще всего приходится искусственно охлаждать (человек каменного века, привыкший добывать огонь трением, не согласился бы с нами).

Чем больше взаимная скорость тел, тем больше энергии расходуется на раскачку атомов, значит, тем большую работу производят тела. С другой стороны, известно, что *работа в единицу времени (мощность) равна силе, умноженной на скорость. Эта сила и есть сила трения.*

Мы весьма формально «ввели» силу трения. Правда, попытались разъяснить ее природу.

Можно поступить и несколько иначе. Выяснить, какое количество импульса (количество движения) теряет движущееся тело в единицу времени на возбуждение колебаний атомов. Согласно закону Ньютона изменение импульса тела в единицу времени равно действующей на него силе. Это дает нам возможность определить силу трения. Конечно, оба определения приводят к одному и тому же значению силы.

Сила трения характеризует взаимодействие между макроскопическими телами, и, хотя трение — резуль-

тат взаимодействия отдельных атомных частиц, сила трения разительно отличается от сил, которые действуют между атомами и молекулами. Действительно, силы, действующие между атомами и молекулами, зависят только от расстояния между ними, а сила трения зависит от относительной скорости тел. Однако сила трения не только этим отличается от сил взаимодействия между микроскопическими телами. Она обладает свойством, называемым разными словами, смысл которых одинаков:

Необратимость, диссипация, потери

Под действием силы трения тело всегда теряет энергию, всегда тормозится. Это связано с тем, что энергия движения тел при трении расходуется на возбуждение движения атомных частиц. Атомов невообразимо много (10^{23} частиц в 1 см^3), движутся они беспорядочно. Переданная им энергия попросту рассеивается (диссипируется, от французского слова «dissipater» — рассеивать) между бесчисленными атомами. Новые хозяева энергии непрерывно обмениваются ею друг с другом и вовсе «не склонны отдать долг» макроскопическому телу. Описанный процесс есть, конечно, переход кинетической энергии в тепловую. Мы видим, что этот процесс необратим.

Плодотворный метод обобщения понятий состоит в том, что одно из основных свойств, присущее данному понятию, принимают за его новое определение. Воспользуемся этим методом для обобщения понятия трения. Важнейшее свойство трения, как мы видели, — это необратимость, связанная с переходом энергии упорядоченного движения в тепло. Примем это свойство за определение и отныне будем именовать трением всякий необратимый процесс, сопровождающийся переходом энергии упорядоченного движения в тепло. Теперь можно говорить о трении двух встречных потоков газа — они взаимно тормозятся и нагреваются, о

*) Проблемой трения заняты коллективы ученых, которым приходится привлекать самые современные методы исследования и последние представления о движении атомных частиц в твердых телах.

трении твердого тела о газ и т. д.

А сила трения? Она по-прежнему сопровождает процесс трения. В самом деле, в процессе трения энергия упорядоченного движения уменьшается, значит, уменьшается и его скорость. Иными словами, ускорение направлено в сторону, противоположную скорости тела.

Вспомним второй закон Ньютона. Где есть ускорение, там есть и сила. Эта сила и есть сила трения. Она направлена в сторону, противоположную скорости, она всегда тормозит...

Простой случай

Бывают случаи, когда расчет силы трения сравнительно прост и не требует глубокого проникновения в теорию твердого тела.

Пусть, например, твердое тело движется через достаточно разреженный газ. Тогда сила трения обусловлена столкновениями атомов газа с поверхностью тела.

Прежде чем приступить к расчету силы трения, рассмотрим отдельный акт столкновения. Частица с импульсом P падает на поверхность тела. Столкновение атома с поверхностью — сложное событие. Подумаем, что может произойти. Атом может остаться на поверхности (прилипнуть), может глубоко проникнуть в глубь тела, а может и отразиться от поверхности тела. При отражении (нас будет интересовать именно этот случай, мы дальше объясним почему) тоже возможны различные ситуации. Например, атом может ионизоваться или выбить атом с поверхности, молекула может распасться на составляющие ее атомы и так далее. Короче говоря, возможностей много, но будем считать, что атом просто отразился, как мяч от стенки. Не для упрощения, хотя эта ситуация действительно простейшая, а потому, что в подавляющем большинстве случаев при не слишком быстром движении тела через газ именно это и происходит — атомы просто отражаются (отскаки-

вают) от поверхности тела *). Более сложные ситуации (внедрение атомов в твердое тело, ионизация и др.), конечно, тоже наблюдаются и подробно исследованы. Каждый из этих процессов происходит с наибольшей вероятностью при определенной скорости частиц. Например, чем больше скорости частиц, тем больше вероятность того, что атом проникнет на сравнительно большую глубину в твердое тело. Чтобы представить себе, о каких скоростях идет речь, отметим: атом кислорода, налетающий на поверхность твердого тела со скоростью 10^7 см/сек**), проникает приблизительно на 10—12 атомных расстояний в глубину твердого тела. Средняя тепловая скорость v атомов газа с массой m , как показывает молекулярно-кинетическая теория газов, равна $\sqrt{\frac{kT}{m}}$,

где T — температура в абсолютных единицах, а k — так называемая постоянная Больцмана, равная $1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/град. При $T = 300^\circ \text{K}$ ($=27^\circ \text{C}$) средняя скорость атома кислорода меньше 10^5 см/сек. Если тело покоится в газе, то средняя скорость столкновений молекул газа с поверхностью тела приблизительно совпадает со средней тепловой скоростью; если же тело движется, то отличается от нее. Однако в том случае, когда скорость движущегося тела мала по сравнению со средней тепловой скоростью (никогда не следует проходить мимо частных случаев, в которых исследуемый вопрос выглядит проще), скорость столкновения почти не отличается от тепловой, и энергии атома попросту недостаточно для проникновения вглубь твердого тела.

Хотя мы назвали случай отражения атомов от поверхности твердого тела простейшим, но и он нуждается в пояснении.

*) К счастью, очень редко молекулы воды из воздуха прилипают к летящему самолету. Иначе опасность оледенения возросла бы во много раз.

**) Кинетическая энергия атома кислорода при этом равна 10 кэв (см. ниже).

И атом, и тем более твердое тело — сложные системы, состоящие из большого числа частиц. При отражении атома от поверхности тела часть его энергии может уйти на то, чтобы несколько изменить внутреннее состояние атома или твердого тела, попросту говоря, сдвинуть частицы, из которых состоит атом и твердое тело. Если это произошло, то столкновение называется *неупругим*. Если же нет, то *упругим*. Каждое столкновение обладает некоторой неупругостью, но если часть энергии, ушедшая на изменение внутреннего состояния сталкивающихся объектов (атома, твердого тела), мала по сравнению с энергией атома, то неупругостью можно пренебречь и считать столкновение полностью упругим. Мы будем рассматривать именно такие столкновения.

Несколько слов о мяче

Может и должен возникнуть вопрос: «Почему неупругость мала?» Ответить на него непросто. Разберем несколько подробнее отскок мяча от стенки или, что проще, от пола. Если столкновение упруго, то мяч, начавший движение с нулевой скоростью, после удара об пол подпрыгнет на высоту, с которой упал (трением о воздух пренебрегаем). Если столкновение неупруго, то мяч не долетит до начальной высоты. Опыт показывает, что твердый, хорошо надутый мяч прыгает хорошо, а мягкий — плохо. И что от деревянного пола мяч отскакивает хорошо, а от песка — плохо. Все определяется тем, легко или трудно сдвинуть молекулы или атомы, из которых состоят сталкивающиеся тела (мяч, пол), относительно друг друга. Если легко (ненадуемый мяч, отскок от песка), то соударение неупруго, если трудно, то — упруго. Казалось бы, что должно быть иначе. Если трудно сдвинуть, то на это тратится большая часть энергии, если легко, то меньшая. Тогда было бы наоборот: мягкий мяч подпрыгивал бы на большую высоту, чем твердый. Хотя непосредственное

наблюдение отвергает эту возможность имеет смысл проверить себя расчетом.

Законы сохранения и неравенства

Рассмотрим столкновение двух элементарных частиц в том случае, когда одна из них гораздо тяжелее другой. Называя частицу элементарной, мы утверждаем, что внутреннее движение в частице отсутствует или не играет никакой роли в изучаемом явлении. Так, Землю можно было бы считать элементарной частицей при изучении движения Луны, если бы не приливы и отливы, «отсасывающие» ее энергию. Жесткий, хорошо надутый мяч выступает в процессе столкновения как элементарная частица, а слабо надутый — как сложное тело.

Пусть тяжелая частица массы M до столкновения покоится. Обозначим через $p = mv$ импульс легкой частицы до столкновения. Для оценки импульсов и энергий частиц после столкновения воспользуемся законами сохранения энергии и импульса.

Ясно, что в результате столкновения кинетическая энергия тяжелой частицы может только увеличиться (напомним, что до столкновения она равнялась нулю). Так как полная энергия не изменяется, то кинетическая энергия легкой частицы после столкновения уменьшается, а вместе с ней уменьшается скорость v легкой частицы и величина ее импульса. Поэтому изменение импульса легкой частицы $\Delta p = p' - p$ не превосходит $2mv$.

Применим теперь закон сохранения импульса. Он утверждает, что изменения импульсов Δp и ΔP легкой и тяжелой частиц равны по величине и противоположны по направлению: $\Delta p = -\Delta P$.

С другой стороны, так как тяжелая частица до столкновения покоилась, то $\Delta p = \Delta P = MV'$ (V' — скорость тяжелой частицы после столкновения). Поэтому

$$V' \leq \frac{2m}{M}v$$

и

$$\frac{MV'^2}{2} \leq \frac{2m^2}{M} v^2 = \frac{4m}{M} \frac{mv^2}{2}.$$

Это означает, что

$$\frac{MV'^2}{2} / \frac{mv^2}{2} \leq 4 \frac{m}{M}.$$

Итак, отношение энергии, переданной тяжелой частице, к первоначальной энергии легкой частицы не может превысить значения $4 \frac{m}{M}$. Чем тяжелее тело, с которым сталкивается частица, тем меньше переданная энергия, тем ближе столкновение к упругому.

При столкновении с телом большой массы переданная ему энергия очень мала. Но ведь масса — мера инерции. Тело большой массы трудно сдвинуть*). Таким образом при столкновении с телом, которое трудно сдвинуть, передается малая доля энергии. Подтвердилось наше наблюдение над отскоком мяча.

Прочитав внимательно последние абзацы, можно убедиться, что, отказавшись от точных соотношений — равенств, мы смогли почти без труда получить существенные сведения о процессе столкновения.

Твердое тело с точки зрения атома

Теперь вернемся к столкновению атома с твердым телом. Прежде всего постараемся понять, почему атом ведет себя как надутый (жесткий, упругий) мяч, а не как мягкий, слабо надутый. Хорошо известно, что электроны в атоме находятся в определенных фиксированных (чаще говорят, дискретных) состояниях, каждому из которых соответствует определенная фиксированная энергия.

Но это означает, что для того, чтобы изменить внутреннее состояние атома (перевести электроны или хотя бы один электрон из одного состояния в



Рис. 2.

другое), нужно затратить энергию, равную разности энергий конечного и начального состояний (рис. 2). Если кинетическая энергия $E_{кин}$ атома газа гораздо меньше, чем разность энергий двух электронных состояний в атоме, т. е. если

$$E_{кин} \leq \Delta E,$$

то атом отражается упруго, ему попросту не хватает энергии для возбуждения своих электронов и приходится вести себя как элементарная частица*). Как же обстоит дело в действительности? Обратимся к цифрам. Различие энергии ΔE между возбужденным состоянием и основным составляет несколько электрон-вольт. Когда речь идет о тепловых свойствах тел, энергию теплового движения атомов принято измерять в градусах Кельвина**). Различие энергии между возбужденным состоянием и основным составляет в градусном выражении примерно 10^6 °K. В то же время температура земных газов, конечно, значительно меньше 10^5 °K. Наша догадка подтвердилась — все дело в соотношении энергий.

*) Если вы зайдете в магазин, в котором стоимость самого дешевого предмета превышает сумму, имеющуюся в ваших карманах, то «столкновение» с магазином произойдет «упруго» — с чем зашел, с тем и вышел.

**) $1^\circ \text{K} = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} = 0,87 \cdot 10^4 \text{ эв}$.

*) Одна и та же сила, приложенная к телам с разной массой, придает им ускорения, обратно пропорциональные массам.

Мы рассмотрели вопрос с точки зрения состояния атома, но ведь атом может потратить часть энергии на возбуждение движения в твердом теле. Что касается возбуждения электронов внутри атомов, составляющих твердое тело, то к ним полностью относится только что проведенное рассуждение: не хватает энергии. Но атом может качнуть атом (или атомы) твердого тела — заставить его колебаться. Однако надо помнить, что атомы в твердом теле связаны друг с другом (об этом мы говорили вначале). Один атом сдвинуть нельзя, можно возбудить в теле коллективное движение атомов, т. е., другими словами, возбудить звуковую волну. Этот процесс и есть главная причина неупругости столкновения атомов с твердым телом, если атомы падают на поверхность тела с не слишком большими скоростями. Однако, как показывает расчет, изменение энергии атома при этом мало. В данном случае твердое тело при взаимодействии с атомом «выступает» как макроскопическая система — «тяжелая на подъем», а как мы убедились выше, это обстоятельство обеспечивает упругость столкновений.

Приведенные выше, конечно, очень приближенные рассуждения позволяют оценить, до каких скоростей атомов можно считать столкновения упругими. Пока падающий атом «воспринимает» твердое тело как целое, изменение энергии практически отсутствует — изменяется только направление импульса, а когда его энергии хватает на то, чтобы выбить атом твердого тела из его равновесного положения или возбудить электроны внутри себя или в атомах твердого тела, тогда столкновение существенно неупруго.

Так как потенциальная энергия взаимодействия атомов (или молекул) в твердом теле в расчете на одну частицу, как правило, меньше, чем энергия возбуждения электронов в атоме, то критическая скорость $v_{кр}$ (скорость, выше которой столкновение заведомо нельзя считать упругим)

определяется энергией связи. Но энергия связи атомов в твердом теле равна (очень грубо) кинетической энергии молекул при температуре плавления.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT_{пл}$$

Поэтому

$$v_{кр} \approx \sqrt{\frac{kT_{пл}}{m}},$$

где m — масса атома, сталкивающегося с твердым телом.

Может показаться, что нас сильно «увело» в сторону, что мы забыли, о чем ведем разговор — о природе сил трения. Это не так. Длинный разговор о столкновениях атома с твердым телом нам нужен, во-первых, для того, чтобы объяснить именно силу трения. Но, пожалуй, не менее важно и «во-вторых». Во-вторых, этот разговор нужен для того, чтобы показать сложность физических явлений, даже привычных, даже, казалось бы, совершенно элементарных. Можно было, конечно, просто сказать, что атом упруго (мы теперь понимаем, что означает этот термин) отражается от поверхности твердого тела. Но тогда из поля зрения выпала бы сложность взаимодействия атома с поверхностью твердого тела. И, пожалуй, главное: слишком упрощенное представление может привести к ошибкам. Например, если тело движется через газ с очень большой скоростью, то соответственно велика и скорость столкновения атомов с его поверхностью. Тут уже не учитывать неупругость нельзя.

Правда, к оценке «очень большой» надо подходить осторожно. Например, реактивный самолет, летящий с огромной сверхзвуковой скоростью через атмосферу, с точки зрения столкновений надо считать летящим медленно. Разнообразные сложности, возникающие при сверхзвуковом полете, обусловлены отнюдь не характером столкновений молекул воздуха с самолетом, а макроскопическими причинами — именно тем обстоятельством, что самолет летит быстрее звука, перегоняя звуковые волны, которые он возбуждает в воздухе... Вот те-

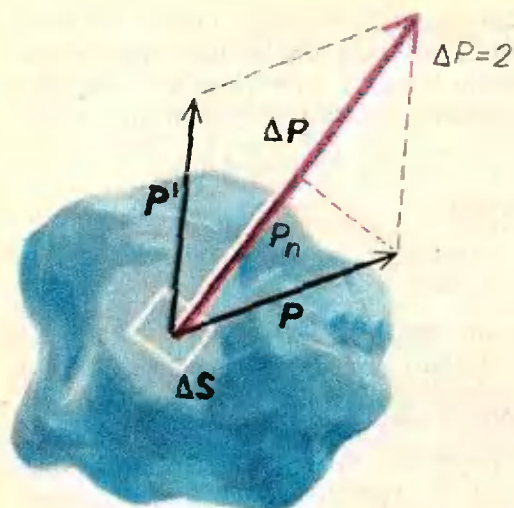


Рис. 3.
Теперь мы действительно отошли в сторону от интересующего нас предмета.

Чему же равна сила трения?

Итак, вернемся к расчету силы трения, действующей на тело, движущееся с относительно малой скоростью u через разреженный газ, температура которого T . Удобно считать тело покоящимся, а газ движущимся со скоростью $-u$. Выделим на поверхности тела бесконечно малую площадку*) ΔS (рис. 3). Импульс молекулы газа, столкнувшейся упруго с телом в точке на выделенной площадке, изменится на $2P_n$, где P_n — проекция импульса молекулы на нормаль к поверхности тела. Это означает, что молекула газа при столкновении с телом отдает ему импульс, равный $2P_n$. Теперь наша задача — подсчитать полный импульс, передаваемый газом телу в единицу времени. Изменение импульса в единицу времени и есть сила (в данном случае действующая со стороны газа на тело). Для вычисления полного передаваемого импульса надо, во-первых, учесть все молекулы, падающие в единицу времени на данную площадку, и во-вторых, просуммировать по всем площадкам.

*) См. по поводу «бесконечно малой площадки» статью Н. Я. Виленкина «Тайны бесконечности» («Квант» № 3, 1970).

Подобная операция проделывалась в статье Я. А. Смородинского «Идеальный газ» («Квант» № 10). Здесь мы воспользуемся готовыми результатами. Давление газа на покоящуюся стенку равно $\frac{1}{3} n m v^2$, где n — число молекул газа в единице объема, m — масса молекулы и v^2 — среднее арифметическое от квадратов скоростей молекул. Если тело покоится ($u = 0$), число ударов справа и слева в среднем одинаково, и поэтому телу никакой импульс не передается. При $u \neq 0$ это не так. Пусть тело движется. В этом случае скорость молекул, налетающих спереди, на u больше, а скорость молекул, налетающих сзади, на u меньше. Поэтому на участок ΔS движущейся плоскости действует сила

$$F = (P_{\text{спереди}} - P_{\text{сзади}}) \Delta S = \\ = \frac{1}{3} n m \Delta S \{ (v + u)^2 - (v - u)^2 \} = \\ = \frac{2}{3} n m u v \Delta S.$$

Вспоминая, что $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ (см. статью «Идеальный газ»), получим

$$F = \frac{2}{3} n \sqrt{3kTm} u \Delta S.$$

Для тела произвольной формы мы должны получить формулу

$$F = \beta S n \sqrt{mkT} u.$$

Здесь S — площадь поверхности тела, а β — численный коэффициент, зависящий от формы тела. Он учитывает, что на одни участки молекулы попадают перпендикулярно к поверхности, а на другие — под углом.

Если воспользоваться законом Клапейрона $PV = NkT$ ($N = nV$ — полное число частиц газа в объеме V), то можно выразить силу трения через давление P и температуру T газа:

$$F_{\text{тр}} = \beta S P \sqrt{\frac{m}{kT}} u.$$

Получился естественный результат: при фиксированных температуре и

скорости тела сила трения тем больше, чем больше давление газа.

Вязкость газов

Мы довольно подробно описали, почему при движении тела через газ на него действует сила — сила трения — результат ударов отдельных молекул о поверхность движущегося тела. При этом мы совершенно не интересовались тем, что происходит с газом, с его молекулами после столкновения. Задумаемся ненадолго о судьбе молекул, столкнувшихся с телом. Ясно, что если бы мы имели возможность измерить скорость всех столкнувшихся с телом молекул, то убедились бы, что средняя скорость их не равна нулю. Молекулы пусть незначительно, но увлекаются движущимся телом. А если измерить скорость молекул вдали от тела, то (в отсутствие ветра, конечно) их средняя скорость равна нулю. Чуть-чуть другими словами: вблизи поверхности движущегося тела имеется упорядоченное движение газа, а вдали от тела его нет. С упорядоченным движением связан некоторый импульс. Слой газа вблизи поверхности тела называют пограничным слоем. Молекулы в пограничном слое чаще сталкиваются с движущимся телом, чем остальные молекулы газа. Из-за этого их средний импульс должен был бы возрастать, если бы не было процесса отвода импульса из пограничного слоя.

Понять этот процесс легко. Молекулы газа, улетающие из пограничного слоя, просто уносят с собой излишек импульса. Вдали от тела они «разбазаривают» его в многократных столкновениях с другими молекулами или в столкновениях с покоящимися телами.

Способность газа переносить импульс из одного места в другое и, главное, необратимо растрачивать его носит название вязкости. Вязкость и трение неразлучны. Вязкость — интересное явление, в котором главную роль играют столкновения между молекулами. Мы ими вовсе пренебрегли при вычислении силы трения, действующей на движущееся тело со стороны газа.

Мы при этом ошиблись. Но как? Преувеличили или занизили силу трения? Легко понять, что преувеличили. Действительно, мы считали, что молекула, столкнувшись с телом, больше никогда к нему не вернется и, следовательно, не будет иметь возможности «вернуть» телу полученный у него импульс. В действительности, если тщательно проследить за многими молекулами, столкнувшимися с телом, то мы убедимся, что часть из них возвращается к телу (после столкновения с какой-либо из молекул газа), другие отдают приобретенный от тела излишек импульса своим партнерам по столкновениям, а те в свою очередь могут столкнуться с телом. Строго говоря, в результате столкновений молекул друг с другом происходит частичный возврат импульса телу, а значит, тело теряет меньше импульса, чем мы считали.

Выведенная здесь формула применима только к очень разреженным газам, у которых среднее расстояние между столкновениями молекул значительно больше размеров тела. Если вычислять силу трения, действующую на пылинки с размерами, не превосходящими нескольких микрон, под категорию разреженных газов может подойти и наш воздух.

ПОЧЕМУ УСТОЙЧИВ ВЕЛОСИПЕД

Едва ли не каждый умеет ездить на велосипеде, но, по-видимому, никто так и не знает, как ему это удается. Кажущаяся простота и легкость скрывают неизученные тонкости, и я затратил много времени и сил, пытаясь раскрыть причину устойчивости велосипеда. Публикации на эту тему, как правило, отрывочны и не содержат проверки теории экспериментом. В своих исследованиях я рассчитывал выяснить причину устойчивости обычных велосипедов, используя велосипеды измененных конструкций. Первые попытки создать велосипед, на котором нельзя ездить, окончились неудачно. Это привело меня к внимательному изучению формы вилки переднего колеса. После этого с помощью вычислений на электронной вычислительной машине я сконструировал и построил совершенно неустойчивый велосипед.

В основу этой статьи положена статья Д. Э. Х. Джоунса «The Stability of the Bicycle», опубликованная в журнале «Physics Today» № 4 за 1970 г.

Перевод и переработка статьи Д. Э. Х. Джоунса осуществлены В. Н. Брезинным и Г. Н. Суховой.

Существующие теории

Большая часть учебников механики и пособий по езде на велосипеде либо не рассматривает вопрос об их устойчивости вовсе, либо считает его слишком простым. Считается, что велосипед балансируется усилиями велосипедиста: когда велосипедист чувствует, что машина падает, он поворачивает ее в сторону падения. Велосипед заворачивает и едет по кривой. Это помогает ему вернуться в вертикальное положение и избежать падения.

Нетрудно понять, почему это происходит. Рассмотрим силы, действующие на велосипед с велосипедистом (рис. 1). F — реакция земли (она равна сумме силы трения $F_{тр}$ и силы нормальной реакции N), P — сила тяжести. Равнодействующая этих сил равна $P \cdot \text{ctg} \alpha$ (где α — угол наклона машины) и направлена к центру круга, по которому едет велосипедист, сооб-

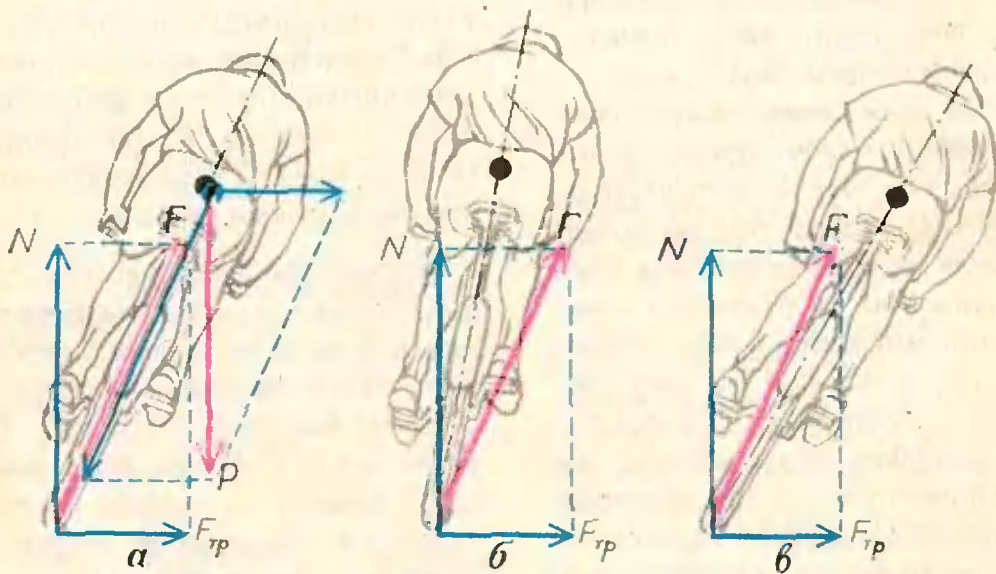


Рис. 1.

шая центру тяжести велосипеда с велосипедистом ускорение

$$a = \frac{P}{M} \operatorname{ctg} \alpha = g \operatorname{ctg} \alpha.$$

Так как трение обычно велико и колеса велосипеда не скользят по земле, то ускорение точки касания колеса с землей определяется радиусом траектории и равно $\frac{v^2}{R}$. Если

угол наклона велосипедиста таков, что ускорение центра тяжести машины с седоком равно центростремительному ускорению точки касания колеса с землей, то велосипедист не падает и не выпрямляется: сила F проходит через центр тяжести системы; если $a > \frac{v^2}{R}$, то велосипедист упадет (сила F проходит выше центра тяжести системы); если $a < \frac{v^2}{R}$, то есть

$$R < \frac{v^2}{g \operatorname{ctg} \alpha},$$

то велосипед выпрямится (сила F проходит ниже центра тяжести велосипедиста, создавая момент, поворачивающий систему вокруг оси, проходящей через центр масс).

Если велосипедист наклонился на угол α , то для того, чтобы машина выпрямилась, ее нужно направить по окружности с радиусом $R < \frac{v^2}{g \operatorname{ctg} \alpha}$.

Чем больше скорость, тем больше радиус окружности, по которой нужно ехать, чтобы не упасть. Это означает, что при большей скорости велосипед выравнивается, если руль повернуть на сравнительно небольшой угол. Поэтому, чем быстрее движется велосипед, тем легче им управлять.

Однако наблюдения выдвигают убедительные возражения против теории, в которой считается, что велосипед устойчив лишь благодаря водителю. Ведь если подтолкнуть велосипед без велосипедиста, он проедет довольно большой путь, хотя никто им не управляет, и упадет примерно через 20 секунд, а не через 2 секунды, как неподвижный велосипед. Ясно, что машина обладает устойчивостью не только за счет усилий велосипе-

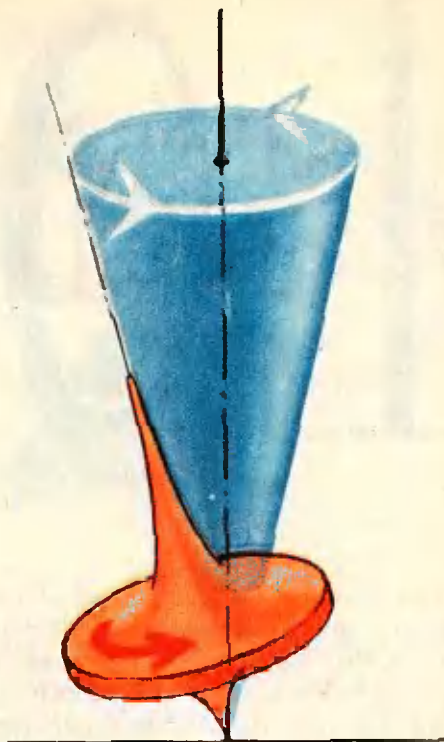


Рис. 2.

диста. Кроме того, при быстрой езде велосипед настолько устойчив, что его трудно опрокинуть, даже если вы этого захотите.

Более сложная теория, объясняющая устойчивость велосипеда, учитывает гироскопический эффект от его переднего колеса.

Гироскопом обычно называют тело, достаточно быстро вращающееся вокруг своей оси. Классический пример гироскопа — обычный волчок. При попытке наклонить ось вращающегося волчка вы почувствуете сопротивление. Ось волчка начнет перемещаться не в том направлении, куда вы его толкаете, а в перпендикулярном. Это явление называется «гироскопическим эффектом». Благодаря ему ось вращающегося волчка обычно движется по конусу, как это показано на рисунке 2: под действием силы тяжести, направленной вертикально, ось поворачивается в горизонтальной плоскости. Направление поворота оси зависит от направления вращения волчка вокруг оси.

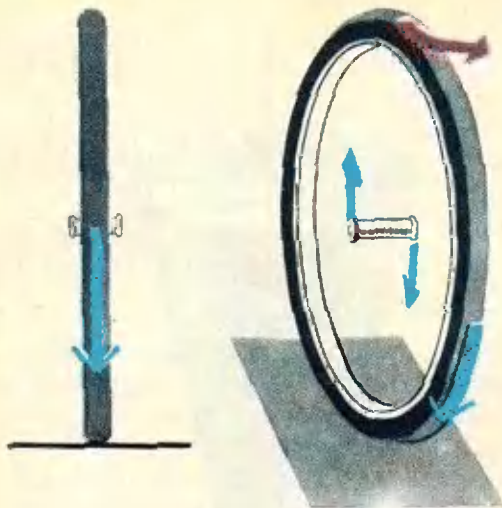


Рис. 3.

Чем больше масса волчка и скорость его вращения, тем больше гироскопический эффект: тем быстрее поворачивается ось волчка при попытке его наклонить. Быстро вращающееся переднее колесо — это тот же волчок. При наклоне велосипеда на ось колеса действуют силы, стремящиеся повернуть ее вместе с велосипедом. При этом ось, вилка и руль за счет гироскопического эффекта должны поворачиваться в плоскости, перпендикулярной плоскости велосипеда (рис. 3). Велосипед заворачивает и благодаря этому возвращается в вертикальное положение.

Привлекательность этой теории в том, что велосипед копируется катящимся обручем, который действительно устойчив именно по этой причине. Велосипед в такой интерпретации попросту обруч с прицепом.

Некоторые теоретики высказали сомнения по поводу этой теории. Они чувствовали, что масса велосипедного колеса слишком мала, чтобы создать гироскопический эффект, достаточный для выравнивания тяжелого велосипеда.

Антигироскопический велосипед

Я начал свою серию экспериментов по устойчивости велосипеда, обладая довольно туманными представлениями о рассмотренных здесь теориях.

Мне пришло в голову, что было бы занятно построить неустойчивый велосипед, который выбьет из седла самого опытного велосипедиста. Сначала я видоизменил стандартный велосипед, насадив на его переднюю вилку второе колесо, не касающееся поверхности земли, так что это колесо можно было вращать в направлении, обратном направлению вращения переднего колеса велосипеда. Этим должно было устраняться влияние гироскопического эффекта. Я назвал это устройство «неуправляемый велосипед» — НВ-1 (рис. 4, б). Он не оправдал возложенных на него надежд; им можно было сравнительно легко управлять и тогда, когда дополнительное колесо вращалось в любом направлении, и тогда, когда оно оставалось неподвижным. Вед себя НВ-1 несколько странно (это я приписал увеличившейся массе вилки с передним колесом), но это не слишком затрудняло управление даже при моих средних водительских способностях и невысоких скоростях. Это означало, что гироскопический эффект оказывал очень незначительное влияние на управление велосипедом при езде с малой скоростью.

Неожиданный результат воодушевил меня. Если велосипед, рассматриваемый как обруч с прицепом, не стабилизируется благодаря гироскопическому эффекту, то, может быть, обруч вообще не гироскоп?

Я проделал эксперимент над дополнительным колесом НВ-1, пристроив к нему внутренний обруч, который мог вращаться в противоположном направлении. Устройство благополучно падало, когда я пробовал его катить. Значит, обруч ведет себя как гироскоп.

Было проведено еще одно, более суровое испытание: будет ли НВ-1 управляемым, если руки водителя убраны с руля? По единственной, вероятно, теории управления велосипедом «без рук» предполагалось, что водитель наклоняет раму угловыми движениями своего тела и таким образом рулит, используя поворот перед-

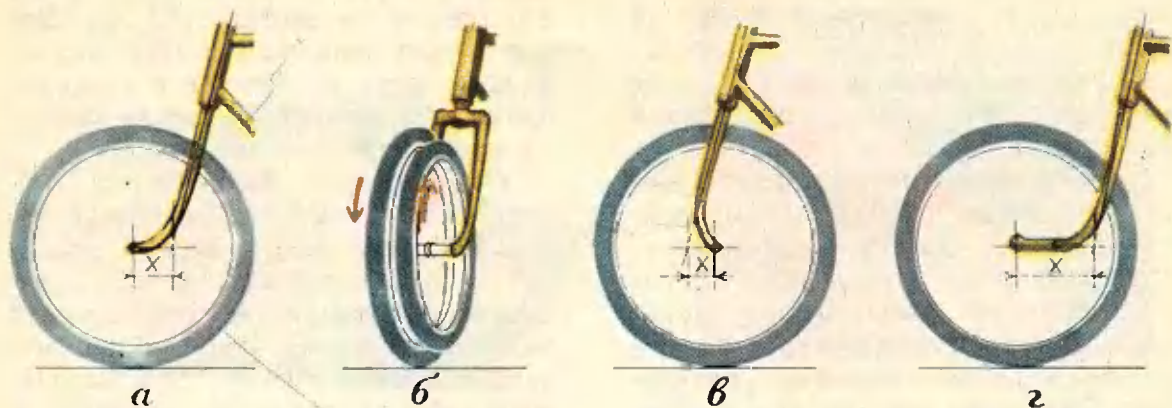


Рис. 4.

него колеса за счет гироскопического эффекта.

Осторожно и с большими опасениями за результат я провел эксперимент, во время которого велосипед ехал под уклон; тем самым исключалось влияние нажима на педали велосипеда. НВ-1 не очень удобен для езды «без рук» даже при «статическом» варианте. Что-то терялось в балансе, и в том случае, когда переднее и дополнительное колеса вращались в разные стороны, управлять им было трудно, но все же возможно.

Это навело меня на мысль о существовании еще одной силы, появляющейся, когда велосипед движется.

Затем я попытался катить НВ-1 без водителя. Когда дополнительное колесо вращалось в сторону, противоположную направлению вращения переднего колеса велосипеда, велосипед неуклюже падал; когда же колесо вращалось в ту же сторону, что и переднее колесо, велосипед падал спокойно, пробежав до этого круга.

Мне стало ясно, что легкий, лишенный водителя велосипед может стабилизироваться гироскопически, а более тяжелая модель — нет. Таким образом, еще предстояло решить проблему устойчивости велосипеда, утяжеленного водителем.

Еще теории

На предварительных стадиях исследования я надоел всем знакомым, излагая им теорию велосипеда. Кроме двух известных теорий, о которых я уже упоминал, я предлагал еще и новые.

1. Велосипед держится отвесно благодаря толщине его шин, то есть он представляет собой тонкий надувной каток.

2. Если велосипед наклоняется, точка контакта переднего колеса с землей смещается к одной стороне его плоскости, создавая момент силы трения, поворачивающий наклоненное колесо. Благодаря этому велосипед выравнивается.

3. Точка контакта велосипедной шины с землей находится за управляющей осью руля (рис. 4). В результате, когда велосипед наклоняется, возникает момент силы F реакции земли, который поворачивает переднее колесо вокруг оси вращения руля.

Можно предположить, что теория 1 не так уж важна. Я испытывал недоверие и к теории 2, поскольку усилие, действующее менее чем на половину ширины шины, должно создавать очень малый момент, зависящий лишь от того, как туго накачали шину.

Теория 3 подняла вопрос о форме

вилки переднего колеса, который я позднее буду рассматривать в данной статье: теория гироскопа не объясняет, почему передние вилки всегда согнуты. Для такого исследования я построил НВ-II.

НВ-II имел тонкое переднее колесо, достигавшее только одного дюйма (2,5 см) в диаметре (при соответственно отлитом ободе), прикрепленное жестко на одной линии с управляющей осью. Это было сделано для проверки теории геометрии управления. Велосипед этот выглядел нелепым устройством; НВ-II было действительно трудно управлять, без водителя он быстро падал, но и это не все — он не выдерживал ухабов выше 10—15 см. Кроме того, маленькое переднее колесо буквально нагревалось докрасна при быстрой езде.

Я отказался от НВ-II, но не отказался от теории 3, поскольку во всех реальных велосипедах точка контакта переднего колеса расположена позади точки пересечения оси руля с землей.

Геометрия рулевого управления

Уверенность в том, что необходимо внимательно изучить форму вилки переднего колеса, возникла при весьма драматических обстоятельствах. Я провел утомительную серию экспериментов, чтобы выяснить, как влияет на устойчивость велосипеда дополнительная нагрузка. Для этого я нагружал велосипед бетонными плитками, которые затем сбрасывал на пустующие газоны (было несколько таких испытаний, которые нельзя проводить на общественных дорогах). Идея эксперимента — выяснить, действительно ли дополнительные массы не дают возможности переднему колесу стабилизировать велосипед гироскопически, как это следовало из поведения велосипеда с водителем и без него. Нагрузка делала велосипед менее устойчивым, и, если дополнительное колесо вращалось в сторону, противоположную направлению вращения переднего колеса, он сразу же

падал. Несчастливая машина еще и еще раз падала на землю с грузом. Это заставляло меня выпрямлять пострадавшие части велосипеда и заменять сломанные спицы почти после каждого испытания.

Однажды мне понадобилось сменить руль и изменить конструкцию тормоза. При этом переднее колесо случайно повернулось на 180°, изменив тем самым геометрию передней вилки (рис. 4, в). Полученную модель я назвал НВ-III. Эта машина вела себя на редкость неуклюже и когда я ехал на ней, нажимая на педали, и когда просто катил. В этот раз без всякого умысла я подтолкнул велосипед с перевернутой вилкой, рассчитывая, что он сразу упадет. Несожиданно, прежде чем упасть, он проехал некоторое расстояние. Дальнейшие испытания показали, что этот новый «неуправляемый велосипед» удивительно устойчив. Он не просто бегал по кривой, если его наклонить, но и активно возвращался к вертикальному положению. Неровности дороги и толчки не угрожали ему, и только, замедлив движение, он становился неустойчивым. Он начинал колебаться из стороны в сторону, пока не падал.

В чем причина устойчивости этой модели? Одна из причин становится понятной, если попробовать катить велосипед, придерживая его за седло: им, велосипедом, можно управлять, наклоняя раму — переднее колесо автоматически принимает необходимый наклон. При этом центр тяжести наклоненного велосипеда опускается. Так возникла новая теория: управлять велосипедом нужно таким образом, чтобы угол поворота переднего колеса обеспечивал самое низкое положение центра тяжести.

Велосипеды, рассчитанные на вычислительной машине

Я приступил к тщательному изучению формы вилки переднего колеса. Форма вилки определяется углом наклона оси руля и расстоянием от втул-

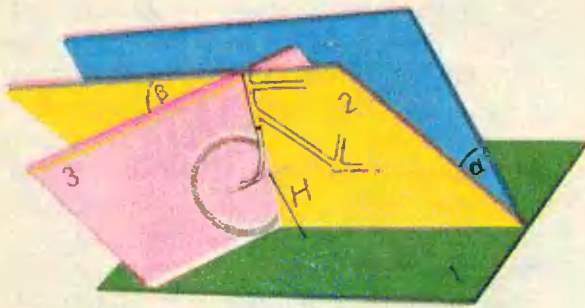


Рис. 5.

ки колеса до этой оси. Нужно было проверить новую теорию, определяя зависимость высоты втулки переднего колеса от углов наклона и поворота (рис. 5) при различных формах передней вилки.

Получить такую зависимость оказалось весьма трудоемкой задачей. После нескольких попыток я отказался от нее и вместо этого написал программу для вычислительной машины, названную мной «Велосипедом». Вооруженный этой программой, я мог рассчитывать все виды велосипедов. Я надеялся доказать, что для обычных велосипедов угол поворота руля, при котором высота центра тяжести велосипеда минимальна, возрастает с углом наклона. Благодаря этому при большем наклоне велосипеда он едет по кривой с меньшим радиусом кривизны, что обеспечивает его устойчивость. Однако расчеты опрокинули мои надежды. Даже если велосипед стоял вертикально, втулка его переднего колеса, а вместе с ней и центр тяжести велосипеда опускались при повороте руля. Минимальная высота центра тяжести достигалась при неправдоподобно большом угле поворота в 60° . С другой стороны, если велосипед наклонен, для достижения минимальной высоты центра тяжести при большем угле наклона нужны меньшие повороты руля. Это означало, что теория неверна. Тогда я рассмотрел, от каких параметров конструкции зависит момент силы F

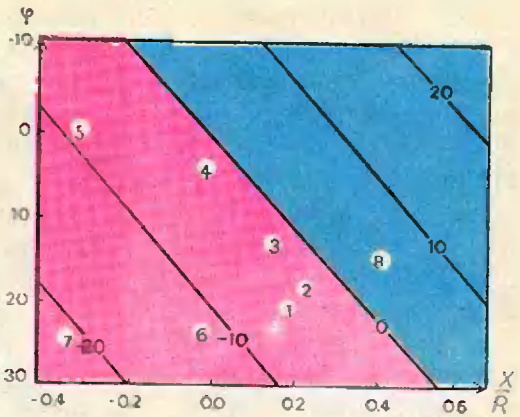


Рис. 6. Точка 1 соответствует современному стандартному велосипеду, 2 — гоночному, 3-6 — велосипедам 1870-1880-х годов, 7—НВ-III, 7—НВ-IV.

реакции земли, действующей на колесо при его наклоне, когда сила F проходит выше плоскости колеса. Этот момент при наклоне велосипеда поворачивает колесо вокруг оси вращения руля как раз так, что велосипед едет по траектории, обеспечивающей его выравнивание. Причем чем больше угол наклона велосипеда, тем этот момент больше, значит, тем быстрее будет поворачиваться колесо. Это и нужно для устойчивости велосипеда.

Ясно, что плечо силы реакции при заданном диаметре колеса определяется длиной выступа вилки и углом наклона оси вращения руля.

Связь момента сил реакции с длиной X выступа вилки, углом φ наклона оси руля, углом наклона велосипеда и углом поворота руля выглядит не очень просто, но я был вооружен программой «Велосипед». Это давало возможность рассчитать, при какой комбинации X и φ разные конструкции велосипедов одинаково устойчивы. Оказалось, что это те велосипеды, для которых $\varphi = \delta - bx$, то есть угол пропорционален длине выступа вилки. Причем велосипед устойчив, если δ отрицательно, и неустойчив при $\delta > 0$.

Для того чтобы проверить этот результат, я нанес на диаграмму с координатными осями φ и $\frac{X}{R}$ (рис. 6) показатели всех известных мне велоси-

педов — от многих ныне существующих моделей до старинных с высокими колесами. Наклонные линии на рисунке соответствуют одинаковой устойчивости. Точки, соответствующие старым моделям, были разбросаны по зоне, зато современные сгруппировались около границы неустойчивости, определяемой линией $\delta = 0$. Этот факт легко объяснить. Очень устойчивая система слабо реагирует на управление, тогда как система, близкая к неустойчивости, более чуткая. Современные конструкции велосипеда отличаются легкостью в движении и управлении. Велосипед модели НВ-III был более устойчив, чем любая машина, выпущенная промышленностью. Ясно и почему он хорошо выравнивается, и почему на нем трудно ездить — он слишком устойчив для управления. Инертный водитель с неразвитыми рефлексами балансирования, которому к тому же все равно, куда ехать, был бы им очень доволен.

Машинный расчет завершил поиски составных частей теории велосипеда. В добавление к мастерству водителя и гироскопическому эффекту оказывается, что на переднее колесо действует момент силы трения, поворачивающей колесо как раз в ту сторону, в которую нужно, для того, чтобы велосипед не опрокинулся. Пока я не создал единой математической теории велосипеда, так что все это, быть может, коллекция курьезов, но по крайней мере все принципы были проверены экспериментально.

Теперь нужно было построить модель НВ-IV с такой формой вилки, чтобы она находилась глубоко в зоне неустойчивости. Я изготовил НВ-IV, переместив переднее колесо моего велосипеда вперед на 15 см (рис. 4, 2). Благодаря этому при наклоне велосипеда момент силы трения стремился повернуть колесо в сторону, противоположную той, куда должно повернуться колесо, чтобы велосипед поехал по кривой, обеспечивающей его устойчивость. Машина попала в неустойчивый режим. Ездить стало дей-

ствительно намного труднее, хотя и не настолько, насколько я надеялся, — возможно, что мое мастерство возросло за время этого исследования. НВ-IV был крайне неустойчив и падал на землю сразу же, как только я толкал его вперед и отпускал.

Кажется, это довольно значительный вклад в создание машины, которая оказалась бы совершенно бесполезной, но это только подтвердило бы мои взгляды на пути развития современной техники. У меня по крайней мере не было намерения навязать продукт своей деятельности многострадальному потребителю во имя прогресса.

ПОПРАВКИ

В отмеченных ниже местах должно стоять следующее:

«Квант» № 8

Стр. 33, 7 строка сверху:

$$\frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Стр. 34, 8 строка сверху:

$$x_1 + x_2 + x_3 + (x_1 x_2 x_3)^{\frac{1}{3}} \geq \dots$$

Стр. 36, 5 и 7 строки сверху. В неравенствах знаки должны быть направлены в другую сторону.

Стр. 45. Слева стоит табл. 2, а справа — табл. 1.

Стр. 52, 6 строка снизу. Вместо знаков \div должны стоять знаки $=$.

«Квант» № 9

Стр. 25, левая колонка, задача 9:

$$\frac{\log_x (2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x}}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{a^2-1} 2},$$

левая колонка, задача 10:

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 (2 \sin x) + a \log_{\frac{1}{2}} \sin x + 3 = \frac{a}{2}.$$

Стр. 33, правая колонка, 8 строка снизу:

... так как $0 < a < b$.

О ПЕРИОДЕ ОБРАЩЕНИЯ СПУТНИКОВ

В сентябре месяце 1970 года была запущена автоматическая станция «Луна 16». 17 сентября она вышла на окололунную орбиту с периодом 1 час 59 мин (119 минут). Что можно, исходя из этих данных, сказать о Луне?

Вспомним, что когда запускают спутник вокруг Земли, то его период обычно бывает около полутора часов (90 минут). Что можно сказать о Земле?

Оказывается, что из этих данных можно оценить величину плотности Луны и Земли.

Если высота спутника невелика (по сравнению с радиусом небесного тела, вокруг которого он вращается), то можно приближенно считать, что спутник движется около поверхности. Приравняем ускорение силы тяжести к центростремительному ускорению:

$$G \frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R,$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса небесного тела, R — его радиус, v — скорость спутника, T — период его обращения. Далее запишем массу через радиус:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

где ρ — средняя плотность.

Подставив в предыдущую формулу это выражение, получим замечательный результат:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

Отсюда следует, что период обращения низкого спутника зависит толь-

ко от плотности небесного тела и не зависит от его размеров. Поэтому, зная период, можно определить плотность Луны и Земли. В таблице приведены значения периода и плотности для разных планет солнечной системы.

Центральное тело	Плотность (г/см ³)	Период
Солнце	1,42	166
Меркурий	5,61	83
Венера	5,16	87
Земля	5,52	84
Луна	3,36	108
Марс	3,95	100
Юпитер	1,34	171
Сатурн	0,64	238
Уран	1,36	170
Нептун	1,30	174

Для Земли период равен 84 минутам. В газетах сообщают обычно несколько большую величину. Это значит, что спутник летит не очень низко. Если обозначить высоту спутника через h , то нетрудно получить и точную формулу для круговой орбиты (попробуйте вывести ее сами):

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G} \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{\frac{3}{2}}} \approx \\ \approx T_0 \left(1 + \frac{3h}{2R} \right),$$

где T_0 — период низкого спутника (приведенный в таблице), а последнее равенство — приближенное — верное, если $h \ll R$. Можно получить и формулу для эллиптической орбиты, если знать законы Кеплера. О них вы прочтете в «Кванте» № 1 за 1971 год.

Я. А. Смородинский

ЗАДАЧНИК

Квант

М56. На окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. Затем в промежутке между двумя одинаковыми числами пишется единица, а между разными цифрами — нуль, а первоначальные цифры стираются. Доказать, что, сколько бы раз мы ни повторяли этот процесс, мы никогда не получим набора из девяти единиц.

М57. а) Найти число k , которое делится на 2 и на 9 и имеет всего 14 делителей (включая 1 и k).

б) Доказать, что если заменить 14 на 15, то задача будет иметь несколько решений, а при замене 14 на 17 решений вообще не будет.

М58. На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них отмечена точка. Известно, что прямые являются биссектрисами некоторого треугольника, а отмеченная точка — одна из его вершин. Построить этот треугольник.

М59. Имеется несколько гирь с весами 1 г, 2 г, 3 г, ..., n г. Их надо разложить на три равные по весу кучки. При каких n это удастся сделать?

М60. Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1 и 0. Разбейте эти числа на две группы так, чтобы сумма любых двух различных чисел из одной и той же группы содержала в своей десятичной записи не менее двух единиц.

Ф66. К батарее с э. д. с. 9 вольт и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр (рис. 1). Сопротивления приборов неизвестны. Если параллельно вольтметру включено сопротивление (его величина тоже

В этом номере все задачи по математике взяты из брошюры «Математические задачи»^{*)}, новое, переработанное издание которой скоро выйдет из печати.

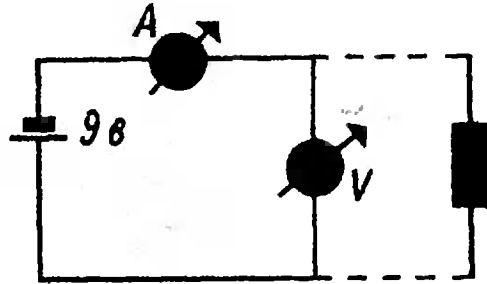


Рис. 1.
неизвестна), то показание амперметра вдвое увеличивается, а показание вольтметра вдвое уменьшается. Каким стало показание вольтметра после подключения сопротивления?

А. Р. Зильберман

Ф67. Буферное устройство (рис. 2) состоит из стержня A , пружины B , надетой на стержень, и направляющей втулки C . Втулка может перемещаться внутри канала, сделанного в массивной стене D . При движении втулки C между ее внешней поверхностью и стеной действует постоянная по величине сила трения $F_{тр}$. Стержень внутри втулки и пружина по стержню перемещаются без трения.

На торцевую поверхность стержня A налетает шар массы M , имея перед соударением скорость v_0 . С какой скоростью шар отлетит?

Массы стержня, пружины и втулки пренебрежимо малы по сравнению с массой шара. Коэффициент жесткости пружины k .

В. К. Петерсон, 31-я школьная физическая олимпиада МГУ, 1970 г.

^{*)} Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго, Математические задачи, издание 3-е, «Наука» (серия «Библиотека физико-математической школы»).

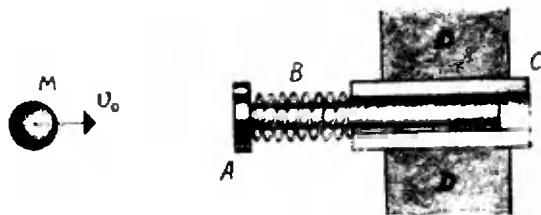


Рис. 2.

Ф68. Стенки сосуда, в котором находится газ, имеют температуру T . Температура газа T_1 . В каком случае давление газа на стенки сосуда больше: когда стенки сосуда холоднее газа ($T < T_1$) или когда теплее ($T > T_1$)?

Г. Я. Мякишев, 31-я школьная физическая олимпиада, МГУ, 1970 г.

Ф69. В сосуд с водой погружается свинцовый шар. В какую сторону выгнется поверхность воды в сосуде за счет дополнительного поля тяготения, создаваемого шаром?

Ф70. Велосипедист легко развивает силу тяги 10 кГ. Сила трения не превышает 5 кГ. Кажется бы, за несколько часов велосипедист может достичь второй космической скорости. Однако это еще никому не удавалось. Почему?

Физико-математическая олимпиада МИЭМ, 1969 г.

Ф71. Имеется равномерно заряженный отрезок AB . Как направлена напряженность электрического поля, создаваемого этим отрезком в точке C : по медиане треугольника ABC ? по его биссектрисе? по высоте? ни по одной из этих линий?

Физико-математическая олимпиада МФТИ, 1970 г.

Помогите художнику!

Художник должен изобразить на рисунке тонкую линию. Можно, конечно, провести просто черную линию на белом фоне, но наш художник любит разнообразные яркие цвета.

Сделаем следующие предположения о типографских возможностях передачи цвета (см. рисунок на обложке журнала). Кроме белого, существует четыре основных цвета: розовый (Р), желтый (Ж), голубой (Г) и черный (Ч)—и еще четыре смешанных: красный (Р+Ж), сиреневый (Р+Г), зеленый (Ж+Г) и коричневый (Ж+Р+Г). Черный цвет в смеси с любым дает снова черный цвет. Для простоты мы считаем, что «полутонов» не существует.

Спрашивается, сколькими способами можно нарисовать цветную линию на цветном фоне (и линия, и фон могут быть любых, но, разумеется, различных цветов; можно использовать и белый цвет)? Ответ очевиден: $72 = 9 \times 8$. Для фона можно выбрать любой из 9 цветов, затем для линии — любой из остальных 8 цветов (кроме уже выбранного для фона).

Но нужно учесть еще одно обстоятельство: поскольку разные краски накладываются при печати не одновременно, а последовательно, то они могут несколько сместиться одна относительно другой. Поэтому, скажем, вместо зеленой линии на розовом фоне может получиться белый просвет и рядом коричневая (или даже отдельно красная и сиреневая) линия. Нас это не устраивает. Пусть уж цвета смещаются, но линия тем не менее должна быть одна! Подсчитайте, сколькими способами художник может удовлетворить это требование.

И. Б. Васильев

РЕШЕНИЕ

М16. Докажите, что многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, который при трех различных целых значениях x принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

Решение. Заметим, что для любого многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами и для любых двух целых чисел a и b разность $p(b) - p(a)$ делится на $b - a$, поскольку для любого натурального m разность $b^m - a^m$ делится на $b - a$:

$$b^m - a^m = (b - a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \dots + ba^{m-2} + a^{m-1}).$$

Если существуют четыре целых числа c_1, c_2, c_3 и a такие, что $p(c_1) = p(c_2) = p(c_3) = 1$ и $p(a) = 0$, то

$$p(c_1) - p(a) = p(c_2) - p(a) = p(c_3) - p(a) = 1,$$

и поэтому каждое из чисел $c_1 - a, c_2 - a, c_3 - a$ может равняться только 1 или -1 , значит, все эти числа не могут быть различными. Такое решение прислали *А. Веселов* из д. Волчиково Калининской обл., *И. Сурянуенко* из Минска и другие читатели.

Начало решения можно изложить несколько иначе, если знать, что такое деление многочленов *). Разделим «углом» многочлен $p(x)$ на $x - a$, где a — целый корень многочлена. Тогда $p(x) = (x - a)q(x)$, где $q(x)$ — тоже многочлен с целыми коэффициентами. Действительно, поскольку старший коэффициент многочлена $x - a$ равен 1, то, когда мы делим многочлен на $x - a$ уголком, все коэффициенты появляющихся при этом многочленов будут получаться из уже имеющихся только операциями сложения, вычитания и умножения, то есть тоже будут целыми. Остаток равен нулю, поскольку a — корень многочлена: $p(a) = 0$. Таким образом, $(a - c_1)q(c_1) = (a - c_2)q(c_2) = (a - c_3)q(c_3) = 1$, и дальнейшее рассуждение точно такое же, как в первом решении.

М17. Крестьянин, подойдя к развилке двух дорог, расходящихся под углом в 60° , спросил: «Как пройти в село NN ?» Ему ответили: «Иди по левой дороге до деревни N — это в восьми верстах отсюда, — там увидишь, что направо под прямым углом отходит большая ровная дорога — это как раз дорога в NN . А можешь идти другим путем: сейчас по правой дороге; как выйдешь к железной дороге, — значит, половину пути прошел; тут поверни налево и иди прямо по шпалам до самого NN ». — «Ну, а какой путь короче-то будет?» — «Да все равно, что так, что этак, никакой разницы». И пошел крестьянин по правой дороге.

Сколько верст ему придется идти до NN ? Больше десяти или меньше? А если идти от развилки до NN напрямик? (Все дороги считаются прямыми.)

Решение. Пусть A — развилка дорог, B — деревня N , C — село NN , D — точка, где правая дорога выходит на железнодорожное полотно. По условию (расстояния измеряются в верстах) $AB = 8$, $\angle A = 60^\circ$, $AD = DC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB + BC = 2AD$. Пусть $AD = 2x$, $DH \perp AB$ и

*) См. статью «Сокращение алгебраических дробей» А. Н. Виленина («Квант» № 11).

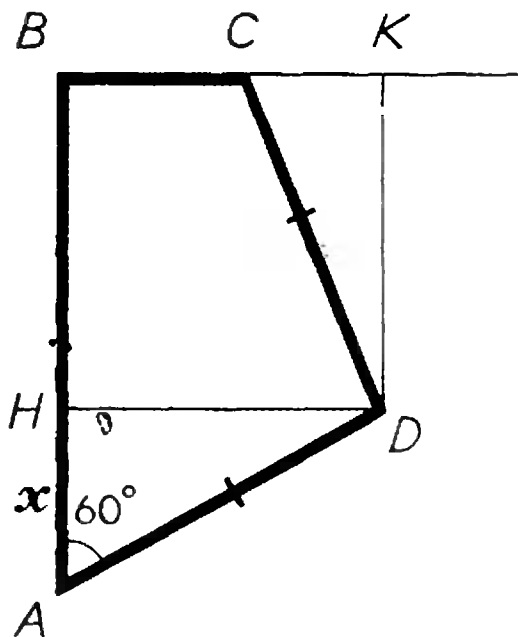


Рис. 1.

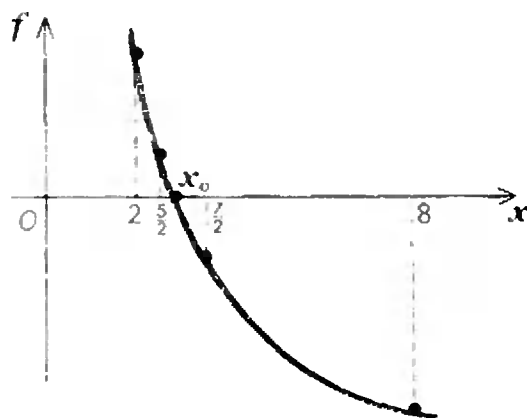


Рис. 2.

$DK \perp BC$ (рис. 1). Тогда $AH = x$, $KD = BH = 8 - x$, $AB + BC = 2AD = 4x$, $BC = 4x - 8$, $BK = DH = x\sqrt{3}$, $KC = |BC - BK| = |4x - 8 - x\sqrt{3}|$ и для выполнения всех условий задачи*) необходимо и достаточно выполнение равенства $CK^2 + KD^2 = AD^2$ или $(4x - 8 - x\sqrt{3})^2 + (8 - x)^2 = 4x^2$,

где $8 - x > 0$ и $4x - 8 > 0$, то есть $2 < x < 8$. После преобразования получаем $(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(5 - \sqrt{3})x + 16 = 0$.

Обозначим трехчлен, стоящий в левой части, через $f(x)$. Нетрудно проверить, что условиям $0 < x < 8$ удовлетворяет только меньший корень x_0 уравнения $f(x) = 0$ (рис. 2). Его можно записать в виде

$$x_0 = \frac{5 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{2 - \sqrt{3}} = 7 + 3\sqrt{3} - \sqrt{44 + 26\sqrt{3}}.$$

Крестьянину придется пройти путь $4x_0$. Выяснить, больше это число 10 или меньше, проще прямо из уравнения. Поскольку $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}(14 - 5\sqrt{3}) > 0$, ясно, что $x_0 > \frac{5}{2}$, то есть $4x_0 >$

> 10 . Покажем, что расстояние AC напрямик меньше 10. Действительно, неравенство

$\sqrt{8^2 + (4x_0 - 8)^2} < 10$ при $2 < x_0 < 8$ эквивалентно таким: $(4x_0 - 8)^2 < 36$, $4x_0 - 8 < 6$, $x_0 < \frac{7}{2}$. Так же как и выше, убеждаемся, что $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4}(22 - 21\sqrt{3}) < 0$, откуда $x_0 < \frac{7}{2}$, и, следовательно, $AC < 10$.

Решение этой задачи прислали нам *М. Прегер* из Томска, *А. Михайлов* из Экибастуза и другие читатели.

С. Берколайко (Белгородская область) нашел короткое доказательство того, что $AB + BC > 10$. В наших обозначениях оно выглядит так:

*) На самом деле, легко доказать, что основание перпендикуляра K лежит вне отрезка BC (как и показано на рисунке), но это не используется в нашем решении.

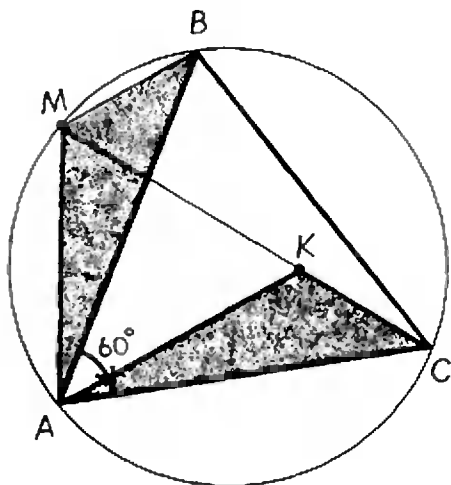


Рис. 3.

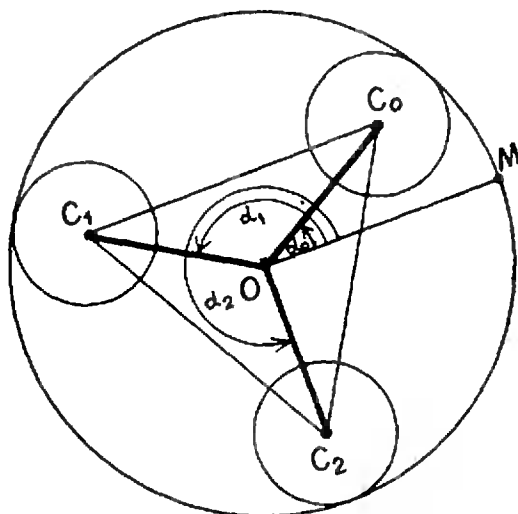


Рис. 4.

по теореме косинусов из треугольника ABD

$$BD^2 = 4x_0^2 + 64 - 16x_0;$$

с другой стороны, неравенство треугольника дает

$$BD < BC + CD = 6x_0 - 8,$$

откуда $4x^2 + 64 - 16x < (6x - 8)^2$, $2x^2 - 5x > 0$,

и с учетом $2 < x_0 < 8$ получаем $x_0 > \frac{5}{2}$. Более точное значение расстояния $AB + BC$, по утверждению автора этого письма, таково: 11,044 версты.

Некоторые читатели неправильно поняли условие задачи и считали, что $\angle D = 90^\circ$, то есть что треугольник ADC равнобедренный и прямоугольный. Это, конечно, неверно.

М18. а) Докажите, что для любой точки M окружности, описанной около правильного треугольника ABC , один из трех отрезков MA , MB , MC равен сумме двух других.

б) Три равные окружности γ_1 , γ_2 , γ_3 попарно касаются друг друга, и вокруг них описана окружность γ , которая касается всех трех: γ_1 , γ_2 и γ_3 . Докажите, что для любой точки M окружности γ касательная, проведенная из точки M к одной из трех окружностей γ_1 , γ_2 , γ_3 , равна сумме касательных, проведенных из точки M к двум другим окружностям.

Решение. а) Пусть точка M лежит на дуге AB описанной окружности. Повернем треугольник AMB вокруг точки A на 60° так, чтобы он занял положение AKC (рис. 3). Поскольку углы MBA и MCA равны (они опираются на одну и ту же дугу AM), точка K лежит на отрезке MC . Поскольку $AM = AK$ и $\angle MAK = 60^\circ$ (по построению), треугольник AMK равносторонний, поэтому $MK = AM$. Итак,

$$MA + MB = MK + KC = MC.$$

Другое решение получается сразу из теоремы Птолемея, согласно [которой в любом вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон: если в равенстве $MC \times AB = MA \cdot BC + MB \cdot AC$ заменить BC и AC на AB , то получим $MC \times AB = (MA + MB) AB$; откуда $MC = MA + MB$].

Эту задачу решили многие наши читатели. *А. Браверман* из Перми, *А. Веселов* из Калининской области, *В. Метлицкий* из Ангарска, *Н. Мирюлюбова* из Актюбинска, *О. Худавердян* из Еревана прислали даже по несколько решений.

б) Докажем более общий факт. Пусть центры трех окружностей радиуса r являются вершинами равностороннего треугольника $C_0C_1C_2$ и O — центр описанной около него окружности радиуса a . Тогда для любой точки M

окружности радиуса $R = a + r$ с центром O касательная, проведенная из точки M к одной из двух окружностей радиуса r , равна сумме касательных, проведенных из точки M к двум другим окружностям. Заметим, что при $r = 0$ получается результат задачи а).

Пусть радиус OM образует с радиусами OC_k ($k = 0, 1, 2$) углы $\alpha_k = = \alpha_0 + k \cdot 120^\circ$ (рис. 4); тогда $MC_k^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha_k^*$, а квадрат касательной, проведенной из точки M к соответствующей окружности, равен $MC_k^2 - r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha_k - (R - a)^2 = 2Ra(1 - \cos \alpha_k)$.

Поэтому касательные равны $2 \sqrt{Ra} \sin \frac{\alpha_k}{2}$ ($\sin \frac{\alpha_k}{2} \geq 0$, поскольку $0 \leq \alpha_k < 2\pi$). Осталось проверить равенство $\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2}$. Это уже просто: $\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} = 2 \cos 60^\circ \cdot \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{4} = \sin \frac{\alpha_1}{2}$.

М. Прегер прислал решение этой задачи с помощью аналитической геометрии. *А. Браверман* прислала нам интересное доказательство (с помощью теоремы Птолемея) следующего обобщения задачи а): пусть M — точка на дуге $A_1 A_{2n+1}$ окружности, описанной около правильного $(2n + 1)$ -угольника $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n} A_{2n+1}$; тогда

$$MA_1 + MA_3 + \dots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_4 + \dots + MA_{2n}.$$

(Решение состоит в том, что выписываются равенства Птолемея для четырехугольников $MA_1 A_2 A_3$, $MA_2 A_3 A_4, \dots$,

$$MA_{2n-1} A_{2n} A_{2n+1}, MA_{2n+1} A_{2n} A_1, MA_{2n+1} A_2 A_1,$$

причем все члены, содержащие MA_{2h} , помещаются в левой части равенства, а все члены, содержащие MA_{2h+1} , — в правой, и затем все равенства складываются.) Подумайте, как доказать это утверждение и аналогичное обобщение задачи б) с помощью тригонометрических функций.

М19. В бесконечной цепочке нервных клеток каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «покой» и «возбуждение». Если в данный момент клетка возбудилась, то она посылает сигнал, который через единицу времени (скажем, через одну миллисекунду) доходит до обеих соседних с ней клеток. Каждая клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал от одной из соседних клеток; если сигналы приходят одновременно с двух сторон, то они гасаются, и клетка не возбуждается.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ возбуждена только одна клетка. Сколько клеток будет находиться в возбужденном состоянии через 15 мсек? через 65 мсек? через 1000 мсек? вообще через t мсек?

Что будет в том случае, если цепочка не бесконечная, а содержит всего N клеток, соединенных в окружность. — будет ли возбуждение поддерживаться бесконечно долго или затухнет?

Решение. Достаточно проследить, как распространяется возбуждение от одиночной клеточки первые десять — пятнадцать тактов (рис. 5), чтобы подметить следующие закономерности.

1. В момент времени $t = 2^k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ возбуждены только две клетки: $x = -2^k$ и $x = 2^k$.

2. В момент времени $t = 2^k - 1$ возбуждены 2^k клеток от $x = -2^k + 1$ до $x = 2^k - 1$ с нечетными x .

3. Пусть $0 \leq t < 2^k$. Тогда в момент времени $2^k + t$ возбуждено ровно вдвое больше клеток, чем в момент времени t .

Для доказательства этих закономерностей (индукцией по k) можно воспользоваться тем, что «волны возбуждения», рождаемые каждой из двух клеток, активных в момент 2^k , не перекрываются вплоть до момента времени $t = 2^{k+1} - 1$ и поэтому каждая из них устроена точно так же, как волна возбуждения от одной клетки при $t < 2^k$.

* $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$, поэтому формула верна и при $\alpha > \pi$.

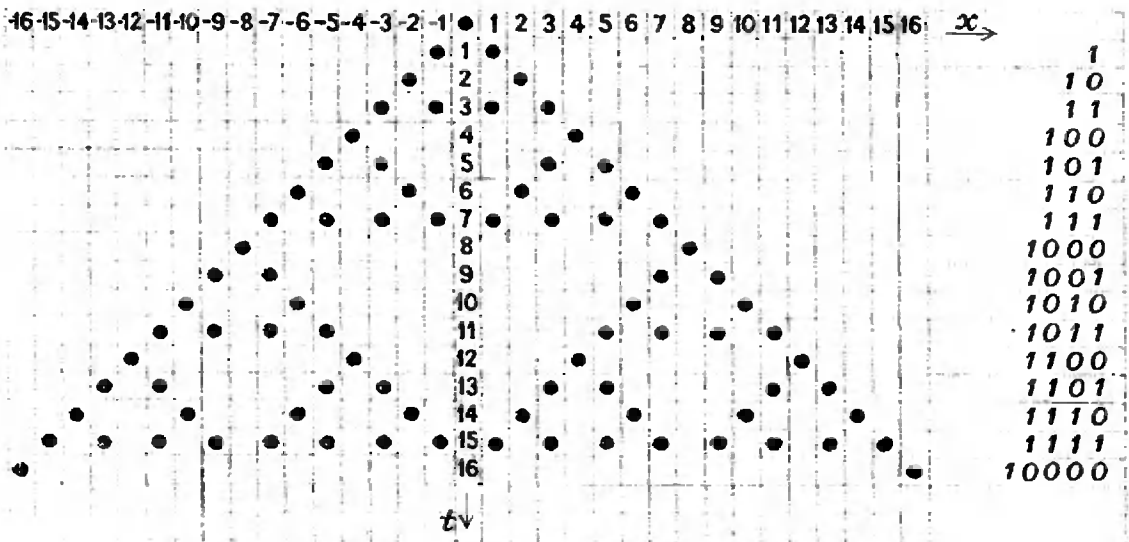


Рис. 5.

Теперь уже легко ответить на вопросы, поставленные в задаче. Через 15 мсек, как это видно и по рисунку, будет 16 возбужденных клеток. Через $64 = 2^6$ их будет две, поэтому через 65 — четыре. Для произвольного конкретного t можно подсчитать $f(t)$ — количество возбужденных клеток в момент времени t , — несколько раз последовательно применяя свойство 3: каждый раз от t можно вычитать наибольшую возможную степень двойки; от этого $f(t)$ уменьшится вдвое. Например:

$$\begin{aligned}
 1000 - 2^9 &= 1000 - 512 = 488, & f(1000) &= \\
 488 - 2^8 &= 488 - 256 = 232, & &= 2f(488) = \\
 232 - 2^7 &= 232 - 128 = 104, & &= 4f(232) = \\
 104 - 2^6 &= 104 - 64 = 40, & &= 8f(104) = \\
 40 - 2^5 &= 40 - 32 = 8, & &= 16f(40) = \\
 8 - 2^3 &= 8 - 8 = 0, & &= 32f(8) = 64.
 \end{aligned}$$

Легко сформулировать ответ в общем виде, пользуясь двоичной системой счисления *).

Действительно, вычтешь из числа наибольшую возможную степень двойки — это все равно что в его двоичной записи выбросить первую цифру. Таким образом, для всех t

$f(t)$ равно 2^m , где m — количество единиц в записи числа t по двоичной системе счисления.

Это правило легко доказывается по индукции, а для первых t вы можете его проверить — на рисунке 5 справа выписаны двоичные разложения чисел t .

Вероятно, читатели журнала, которые помнят статью Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов»**), обратили внимание на то, что расположение возбужденных клеток на рисунке 5 в точности совпадает с расположением единиц в треугольнике Паскаля по модулю два (изображенном на обложке «Кванта» № 6). Таким образом, мы одновременно решили такую задачу: сколько единиц в t -й строке треугольника Паскаля по модулю 2, другими словами, сколько среди биномиальных коэффициентов C_k^t ($k = 0, 1, \dots, t$) нечетных?

Ответ на второй вопрос, поставленный в условии задачи — что будет, если N клеток расположить по окружности? — зависит, конечно, не только от N , но,

**) (См. статью И. М. Яглома «Системы счисления» («Квант» № 6) или брошюру С. В. Фомина того же названия).

**) («Квант» № 6).

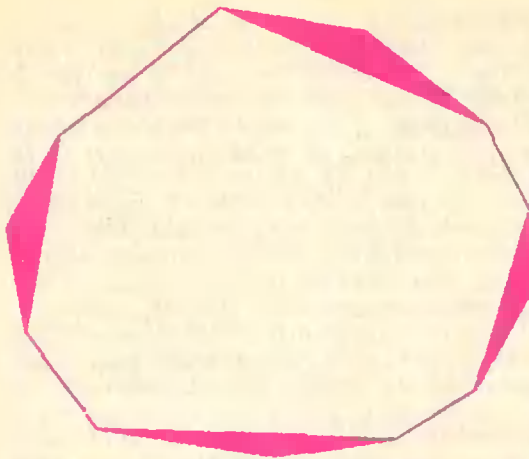


Рис. 6.

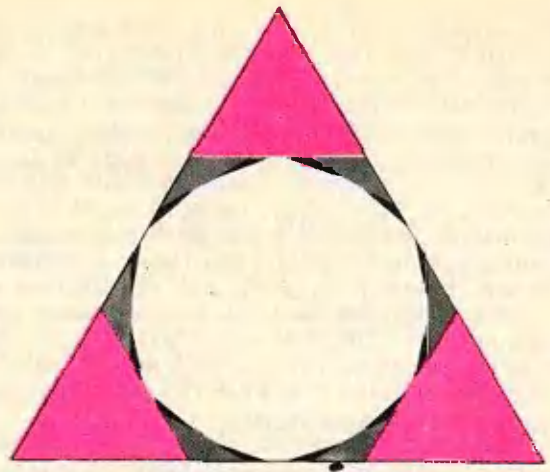


Рис. 7.

вообще говоря, и от «начального состояния» — от того, какие клетки возбуждены в начальный момент времени. В этой задаче существует общее простое правило, позволяющее для каждого начального состояния указать, перейдут ли когда-нибудь все клетки в состояние покоя. Попробуйте найти его самостоятельно.

М20. Можно ли разбить правильный треугольник на миллион выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая пересекала не более сорока из этих многоугольников? (Мы говорим, что прямая пересекает многоугольник, если она имеет с ним хотя бы одну общую точку.)

О т в е т: можно.

Р е ш е н и е. На рисунке 6 изображен выпуклый 12-угольник, который разрезан диагоналями на 5 частей: 8-угольник и четыре треугольника. Каждая прямая пересекает не более двух из этих треугольников. Действительно, прямая, пересекающая треугольник, должна пересечь по крайней мере одну из его сторон, общую с 12-угольником; с другой стороны, прямая может пересечь не более двух (не соседних) сторон выпуклого многоугольника. Точно так же, если $A_1A_2\dots A_{3n}$ — выпуклый $3n$ -угольник, то любая прямая пересекает не более двух из треугольников $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$, $A_7A_8A_9$, ..., $A_{3n-2}A_{3n-1}A_{3n}$.

Теперь покажем, как можно разбить требуемым образом треугольник (рис. 7). Проведем прямые, отсекающие три треугольника *первого ранга*, так, чтобы остался правильный 6-угольник. От каждой его вершины отрезем по треугольнику *второго ранга* так, чтобы остался правильный 12-угольник. От каждой его вершины отрезем треугольник *третьего ранга*, чтобы остался правильный 24-угольник, и так 19 раз. После отрезания от вершин $3 \cdot 2^{k-1}$ -угольника $3 \cdot 2^{k-1}$ треугольников *k-го ранга* остается правильный $3 \cdot 2^k$ -угольник ($k = 1, 2, \dots, 19$).

Любая прямая пересекает не более двух треугольников каждого ранга и еще, быть может, оставшийся $3 \cdot 2^{19}$ -угольник, то есть всего не более $1 + 2 \cdot 19 = 39$ многоугольников. Общее число всех многоугольников, на которые разбит треугольник, равно

$$1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{18} = 1 + 3(2^{19} - 1) > 2^{20} = (2^{10})^2 > 1000^2.$$

Дополнение к решению задачи М11 (см. «Квант» № 11)

Итак, выясним, сколько существует неэквивалентных расположений a чижей на n деревьях (напомним, что два расположения считаются эквивалентными, если из одного может получиться другое при перелетах чижей, разрешенных условием задачи: один чиж — на соседнее дерево по часовой стрелке, другой — против). Уточним постановку задачи. Деревья мы считаем отличимыми друг от друга — занумеруем их по кругу числами $0, 1, 2, \dots, n-1$, а чижей — неотличимыми друг от друга, то есть нас интересует только набор чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, где a_k — число чижей на k -м дереве, но не интересует, какой именно чиж где находится*). Мы уже пользовались тем, что величина остатка от деления на n суммы $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1}$ (обозначим этот остаток r) не меняется при перелетах чижей. Кроме того, ясно, что не меняется общее число чижей: $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = a$.

Таким образом, если два расположения чижей эквивалентны, то у них одинаковы величины a и r . Докажем, что, наоборот, если у двух расположений a чижей величина r одна и та же, то они эквивалентны. А именно мы покажем, что каждое расположение с данным r можно перелетами чижей свести к такому: все чижы собрались на дереве номер 0 , кроме одного, который сидит на дереве номер r .

Это сделать нетрудно. Назовем одного чижа «летуном» и будем каждого из остальных чижей переводить на нулевое дерево, заставляя при этом в паре с ним двигаться в нужную сторону «летуна». Ясно, что всех можно собрать на дереве 0 , кроме «летуна», окончательное положение которого определяется числом r .

Итак, множество всех возможных расположений a чижей на n деревьях состоит из n классов эквивалентности ($r=0, 1, \dots, n-1$).

Ф24. Подставку, на которой лежит тело, подвешенное на пружине, начинают опускать с ускорением a . В начальный момент пружина не растянута. Через какое время тело оторвется от подставки? До какой максимальной длины растянется пружина?

Масса тела M , жесткость пружины k .

Решение. Рассмотрим вначале случай $a < g$. Запишем уравнение движения тела:

$$Ma = Mg - N - T.$$

Mg — действующая на тело сила тяжести, N — сила реакции подставки, и T — сила натяжения пружины. Считая, что пружина подчиняется закону Гука, мы можем записать, что $T = kx$, где x — растяжение пружины. Подставив выражение для T в уравнение движения и учитывая, что в тот момент, когда тело отрывается от подставки, сила реакции подставки становится равной нулю, получим уравнение

$$Ma = Mg - kx.$$

Из этого уравнения найдем, что тело отрывается от подставки после того, как подставка и тело пройдут расстояние

$$x = \frac{M(g-a)}{k}.$$

С другой стороны, так как подставка и тело вначале двигались равноускоренно с ускорением a , то мы можем записать, что

$$x = \frac{at^2}{2}$$

(t — время с момента начала движения подставки до того момента, когда тело отрывается от нее). Это означает, что

$$\frac{at^2}{2} = \frac{M(g-a)}{k}.$$

Отсюда

$$t = \sqrt{2 \frac{M}{k} \frac{g-a}{a}}.$$

Найдем теперь максимальное растяжение пружины x_0 .

Воспользуемся для этого законом сохранения энергии. Конечно, нам нельзя приравнять потенциальную энергию тела в тот момент, когда пружина

*) То, что мы вместо дерева номер n поставили дерево номер 0 , несущественно.

жина не была растянута, и потенциальную энергию пружины в тот момент, когда пружина максимально растянута: кроме силы тяжести и силы натяжения пружины на тело действовала еще и сила реакции подставки. Работа, совершенная этой силой, очевидно, не равна нулю. Зато после того, как тело оторвалось от подставки, мы можем считать, что полная энергия тела и пружины не меняется.

Запишем выражение для энергии пружины и груза в тот момент, когда груз оторвался от подставки. В этот момент груз имел скорость $V = at = a \sqrt{2 \frac{M(g-a)}{k \cdot a}}$, кинетическую энергию $\frac{MV^2}{2} = \frac{M^2(g-a)a}{k}$ и потенциальную энергию $Mg(x_0 - x) = Mgx_0 - \frac{M^2(g-a)g}{k}$ (мы считаем, что потенциальная энергия груза равна нулю, когда пружина максимально растянута). Так как в этот момент пружина была растянута на длину $x = \frac{M(g-a)}{k}$, то потенциальная энергия деформации пружины равна $\frac{kx^2}{2} = \frac{M^2(g-a)^2}{2k}$.

Складывая энергию тела и пружины, найдем, что их полная энергия равна

$$W_1 = \frac{M^2(g-a)a}{k} + Mgx_0 - \frac{M^2(g-a)g}{k} + \frac{M^2(g-a)^2}{2k} = Mgx_0 - \frac{M^2(g-a)^2}{2k}.$$

В тот момент, когда пружина максимально растянута, скорость груза, а значит, и его кинетическая энергия равны нулю. Поэтому энергия груза и пружины будет равна $W_2 = \frac{kx_0^2}{2}$.

Записав, что $W_1 = W_2$, получим уравнение

$$\frac{kx_0^2}{2} - Mgx_0 + \frac{M^2(g-a)^2}{2k} = 0.$$

Решая его, находим

$$x_0 = \frac{Mg}{k} \pm \frac{M \sqrt{a(2g-a)}}{k}.$$

Максимальное растяжение пружины должно быть больше ее растяжения при равновесии тела, когда действующая на тело сила тяжести Mg уравновешена силой натяжения пружины $T = kx_1$: при прохождении положения равновесия тело будет иметь некоторую скорость, так что обязательно проскочит его. Поэтому, так как $x_1 = \frac{Mg}{k}$ и $x_0 > x_1$, то

$$x_0 = \frac{Mg}{k} + \frac{M \sqrt{a(2g-a)}}{k}.$$

Имеет ли физический смысл второе значение x_0 ? Да, но оно дает не максимальное, а минимальное растяжение пружины при колебании тела. Если мы считаем, что потенциальная энергия тела равна нулю, когда пружина растянута на величину x_0 , то при минимальном растяжении пружины, записав закон сохранения энергии, мы получили бы такое же уравнение, как и при максимальном.

Нетрудно определить амплитуду колебаний тела. Она равна разности значений корней уравнения для x_0 , то есть $\frac{2M \sqrt{a(2g-a)}}{k}$.

Если $a \geq g$, то тело оторвется от подставки, как только подставка начнет двигаться. Записав закон сохранения энергии, найдем, что в этом случае максимальное растяжение пружины равно $\frac{2Mg}{k}$.

Правильное решение этой задачи прислал Н. Федин из Омска.

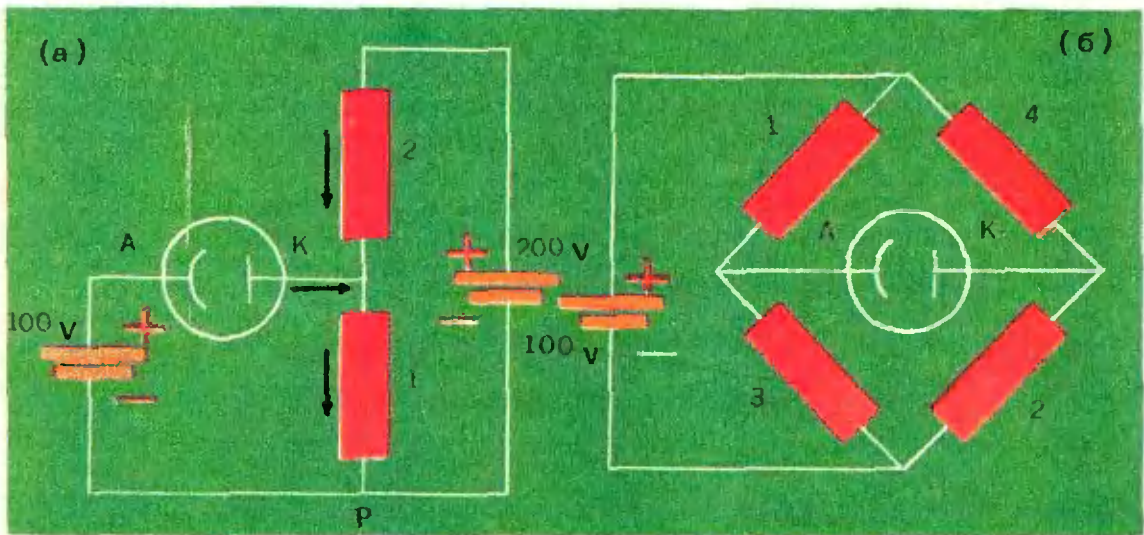


Рис. 8.

Ф25. Если потенциал анода фотоэлемента выше, чем потенциал катода, то через фотоэлемент идет ток $I_0 = 10$ ма (ток насыщения). В противном случае ток через фотоэлемент не идет. Пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти напряжения на фотоэлементах в схемах, изображенных на рисунке 8 (величины сопротивлений указаны на рисунке в килоомах).

Решение. Рассмотрим вначале первую схему. Предположим, что ток через фотоэлемент не идет. В этом случае через сопротивления в 1 и 2 килоома пойдет ток $I = \frac{200\text{в}}{1\text{ ком} + 2\text{ ком}} = \frac{1}{15} \text{ а}$. При этом падение напряжения на

сопротивлении в 2 килоома равно $2 \cdot 10^3 \text{ ом} \cdot \frac{1}{15} \text{ а} \approx 133 \text{ в}$. Это означает, что в этом случае потенциал катода фотоэлемента равен $200 \text{ в} - 133 \text{ в} = +67 \text{ в}$. Но потенциал анода равен $+100 \text{ в}$, то есть он выше потенциала катода. Мы пришли к противоречию, так как в этом случае через фотоэлемент должен идти ток. Это означает, что через фотоэлемент идет ток $I_0 = 10 \text{ ма}$. Найдем разность потенциалов между анодом и катодом. Потенциал анода равен $+100 \text{ в}$ (мы считаем, что потенциал точки P равен нулю). Поэтому нам необходимо найти потенциал катода. Для этого нужно определить падение напряжения на сопротивлении в 1 килоом.

Полагая, что токи через сопротивления идут в направлениях, показанных на рисунке стрелками, и обозначая их I_1 и I_2 , мы можем записать, что $I_0 + I_2 = I_1$. (1)

Для того чтобы найти I_1 и I_2 , нам необходимо составить еще одно уравнение. Обойдем контур, состоящий из сопротивлений и источника с э. д. с. 200 в . Так как работа по перенесению заряда в электрическом поле равна разности потенциалов, умноженной на величину заряда, то мы можем записать, что

$$E - u_1 - u_2 = 0 \quad (2)$$

или

$$E = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2.$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем, что $I_1 \approx 73 \text{ ма}$. Это означает, что потенциал катода равен $I_1 R_1 = 73 \text{ в}$, а разность потенциалов между анодом и катодом равна 27 в .

Аналогично рассмотрим вторую схему. Если мы, как и в первом случае,

предположим, что через фотоэлемент не идет ток, то можно считать, что у нас имеются две цепочки, одна из которых состоит из включенных последовательно сопротивлений в 1 и 3 килоома, а вторая — из сопротивлений в 2 и 4 килоома, причем обе цепочки соединены параллельно и подключены к источнику с э. д. с. 100 в. Тогда через сопротивления в 1 и 3 килоома будет идти ток $I = \frac{100\text{в}}{4 \cdot 10^3 \text{ ом}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ а} = 25 \text{ ма}$, а падение напряжения на сопротивлении в 1 килоом будет равно 25 в. Значит, потенциал анода равен $\varphi_A = 100\text{в} - 25\text{в} = 75\text{в}$. Аналогично можно найти потенциал катода. Он в этом случае равен $33\frac{1}{3}$ в. Получается, что потенциал анода выше потенциала катода, и через фотоэлемент должен идти ток.

Будем считать, что токи через все сопротивления идут в направлении сверху вниз, а через фотоэлемент — слева направо. Тогда можно написать следующие уравнения:

$$I_4 + I_0 = I_2,$$

$$I_1 - I_0 = I_3,$$

$$I_1 R_1 + U_0 - I_4 R_4 = 0,$$

$$E = I_1 R_1 + I_3 R_3,$$

$$E = I_2 R_2 + I_4 R_4.$$

Здесь U_0 — падение напряжения на фотоэлементе.

Так же как и для предыдущей схемы первые два уравнения в этой системе выражают закон сохранения заряда. Действительно, например, в точку соединения сопротивлений в 4 ком и 2 ком и фотоэлемента за единицу времени втекает заряд $I_0 + I_4$, а вытекает I_2 .

Решая эту систему, получим $U_0 \approx 20,8\text{в}$.

Ф26. Две горизонтальные полуплоскости, расположенные на высоте h одна над другой, плавно переходят друг в друга, как показано на рисунке 9. По верхней полуплоскости под углом α к направлению на спуск движется со скоростью v небольшой брусок. Как он будет двигаться по нижней полуплоскости?

Считать, что брусок не подпрыгивает, то есть движется, не отрываясь от поверхности спуска. Третьем пренебречь.

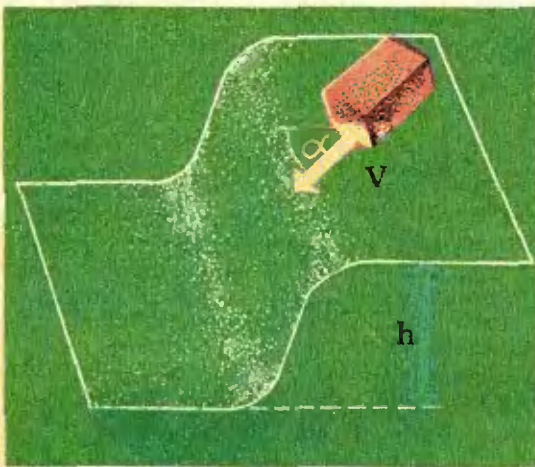


Рис. 9.

Решение. Разложим скорость бруска на две составляющие: $v_2 = v \cos \alpha$ в направлении на спуск и $v_1 = v \sin \alpha$ в перпендикулярном направлении (рис. 10). Так как на брусок в направлении v_1 не действуют никакие внешние силы, то эта составляющая скорости бруска не меняется. Составляющая же v_2 увеличивается. Благодаря этому увеличивается и скорость бруска.

Найдем, какую скорость u будет иметь брусок после того, как он окажется на нижней полуплос-

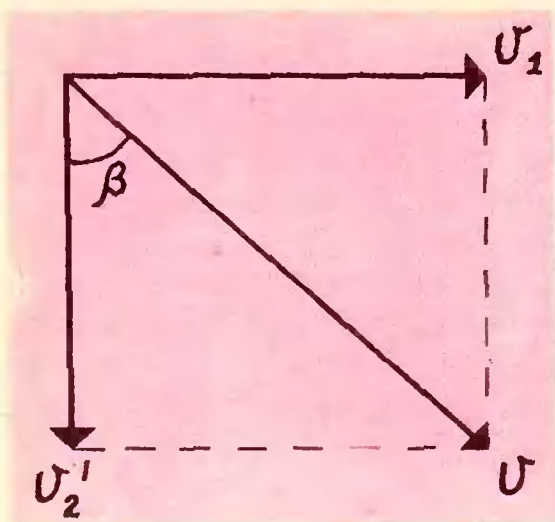


Рис. 10.

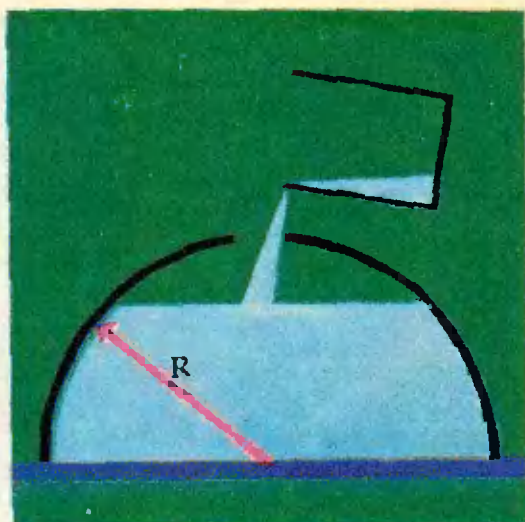


Рис. 11.

кости. Для этого мы можем воспользоваться законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mu^2}{2}. \text{ Отсюда } u = \sqrt{v^2 + 2gh}.$$

Теперь можно найти угол, под которым будет двигаться брусок на нижней полуплоскости:

$$\sin \beta = \frac{v_1}{u} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}} \sin \alpha.$$

Такое решение прислал ученик 9 класса из Гагр СССР Г. Зайцев.

Ф27. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают через отверстие сверху воду рис. 11. Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Найти массу колокола, если радиус его равен R , а плотность воды ρ .

Решение. Сила давления на стол равна сумме сил тяжести, действующих на колокол и воду: $F = Mg + \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g$. Но в тот момент, когда вода при-

поднимает колокол и начинает подтекать, колокол сам не давит на стол. Поэтому сила давления на стол равна давлению воды, умноженному на площадь основания сосуда. Давление воды на стол во всех точках одинаково и равно $\rho g R$, поэтому $F = \rho g R \cdot \pi R^2$.

Это означает, что $\pi R^3 \rho g = Mg + \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g$. Отсюда $M = \frac{1}{3} \pi R^3 \rho$.

Интересную идею решения предложил Анатолий Воровлянский из Горького.

Предположим, что колокол помещен в цилиндрический сосуд радиуса и высоты. Заполним этот сосуд водой и будем считать, что масса колокола пренебрежимо мала. Нетрудно сообразить, что так как давления на колокол снаружи и изнутри во всех точках равны друг другу (это следует из закона Паскаля и из условия, что колокол очень тонкий), то равновесие воды не нарушится, если колокол вообще убрать. Давление воды на стол в этом случае тоже не изменится. Но это означает, что сила давления воды, которую мы дошли в цилиндрический сосуд, действует так же, как колокол, а значит, масса колокола как раз равна массе долитой воды

$$M = (V_{\text{цилиндра}} - V_{\text{полушара}}) \rho = \left(R \pi R^2 - \frac{2}{3} \pi R^3 \right) \rho = \frac{1}{3} \pi R^3 \rho.$$

Ф28. Две параллельные пластины находятся на расстоянии, малом по сравнению с их размерами. Между пластинами помещают несколько тонких и хорошо проводящих тепло перегородок — экранов. Как это влияет на теплопроводность между пластинами; если: а) длина свободного пробега молекул газа, заполняющего пространство между пластинами, то есть расстояние, которое пролетают молекулы газа между двумя последовательными столкновениями, мала по сравнению с расстоянием между экранами; б) длина свободного пробега молекул газа велика с расстоянием между пластинами?

Решение. Ясно, что при установившемся процессе поток тепла (то есть количество тепла в единицу времени) через любое сечение, параллельное пластинам, будет постоянным.

Рассмотрим вначале случай а), когда длина свободного пробега молекул газа мала по сравнению с расстоянием между экранами. В этом случае перенос тепла связан с беспорядочным тепловым движением молекул газа. При тепловом движении происходит обмен молекулами газа между очень близкими областями газа с разной температурой. При столкновении молекулы, имеющие большую энергию, отдают часть энергии молекулам с меньшей энергией. При этом поток тепла между любыми двумя сечениями, параллельными пластинам, пропорционален разности температур этих сечений и обратно пропорционален расстоянию l между сечениями: $Q \sim \frac{T_2 - T_1}{l}$

или $Q = \kappa \frac{\Delta T}{l}$, где κ — коэффициент теплопроводности. При внесении экранов каждый из них примет температуру газа в том месте, где он находится. Распределение температуры в пространстве между пластинами не изменится, а значит, не изменится и теплопроводность между пластинами — количество тепла, переносимое между пластинами в единицу времени. При малом расстоянии свободного пробега молекул газа обмен молекулами происходит между областями, находящимися на расстоянии, равном примерно длине свободного пробега молекул. Поэтому экраны, расстояние между которыми много больше длины свободного пробега, не могут оказать влияния на теплопроводность между пластинами.

В случае б), когда длина свободного пробега молекул газа больше расстояния между пластинами, обычное понятие теплопроводности в газе — явления, связанного со столкновениями молекул газа, вообще говоря, теряет смысл. Но перенос тепла, конечно, существует и в этом случае. Представить его можно так: молекулы газа при ударах о более нагретую пластину приобретают некоторую энергию и, отразившись, летят к более холодной пластине; там они отдают часть энергии и отражаются от холодной пластины с энергией, соответствующей температуре этой пластины. Количество тепла, переносимого между пластинами, не зависит от расстояния между ними и пропорционально разности температур между пластинами и числу ударов молекул о стенки. Нетрудно сообразить, что при внесении экранов число ударов молекул об экраны будет таким же, как и число ударов о пластины до внесения экранов. Но теперь количество тепла, которое будет переноситься с одной пластины на другую, пропорционально не разности температур пластин, а разности температур между соседними экранами: перенос тепла между пластинами такой же, как между двумя соседними экранами, а перенос тепла между экранами пропорционален разности их температур. Так как при внесении экранов расстояние между ними в $k + 1$ раз меньше расстояния между пластинами (при внесении k экранов образуется $k + 1$ промежуток), то разность температур соседних экранов в $k + 1$ раз меньше разности температур пластин — сумма разностей температур между пластинами равна разности температур пластин: $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \dots + \Delta T_{k+1} = (k + 1) \Delta T$. Это означает, что количество тепла, переносимого за единицу времени между пластинами, при внесении пластин уменьшается в $k + 1$ раз.

ЕЩЕ РАЗ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ПАРАМЕТРАМИ

А. Я., Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

Вы уже не раз встречались с уравнениями и неравенствами, содержащими один параметр. А если параметров больше, чем один? Естественно ожидать, что большим станет и число возможных случаев, подлежащих рассмотрению. Ни один из возможных вариантов не должен быть пропущен. Как это сделать? Единого метода, годного для любых уравнений и неравенств с параметрами, нет. В этой статье мы на примерах покажем, как решаются уравнения с двумя параметрами.

Общий вид уравнения относительно x с двумя параметрами a, b таков:

$$F(x; a; b) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) при заданной функции F — это, по сути дела, бесчисленное множество уравнений, каждое из которых определяется упорядоченной парой чисел $(a; b)$.

Как известно, такую упорядоченную пару можно интерпретировать как точку на координатной плоскости. Это дает возможность установить взаимно однозначное соответствие между всеми уравнениями вида (1) при заданной функции F и точками плоскости.

Для этого введем систему координат aOb и условимся каждому уравнению вида (1) ставить в соответствие точку плоскости aOb с координатами $(a; b)$, и наоборот. Назовем эту плоскость плоскостью параметров. Такое соответствие несколько необычно (уравнению соответствует точка), но оно поможет нам в каждом конкретном случае наглядно представить себе множество допустимых значений параметров и не пропустить ни одного случая: каждой точке плоскости параметров соответствует уравнение вида (1) и должен соответствовать определенный ответ.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left. \frac{2a+b}{a+x} - \frac{2a-b}{a-x} - \frac{2a}{b} \right). \quad (2)$$

Решение. Заметим сразу, что при $b = 0$ уравнение (2) не имеет смысла, то есть для любой пары чисел вида $(a; 0)$, где a — любое действительное число, решений нет (красная линия на рисунке 1).

Пусть $b \neq 0$. Найдем ОДЗ: $x \neq \pm a$, освободимся от знаменателей и приведем подобные члены. Получим

$$a(x^2 - 2bx + b^2 - a^2) = 0. \quad (3)$$

Если $a = 0$, то уравнение (3) имеет своими решениями любые значения x . Из них для уравнения (2) запрещены значения $x = \pm a$, то есть $x = 0$.

Таким образом, для любой пары чисел вида $(0; b)$, где $b \neq 0$, уравнение (2) имеет своими решениями любые числа, кроме 0 (зеленая линия). Пусть теперь $a \neq 0$. Решив уравнение $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$, получаем $x_1 = b + a$, $x_2 = b - a$.

*) В виде (1) это уравнение таково:

$$\frac{2a+b}{a+x} - \frac{2a-b}{a-x} - \frac{2a}{b} = 0.$$

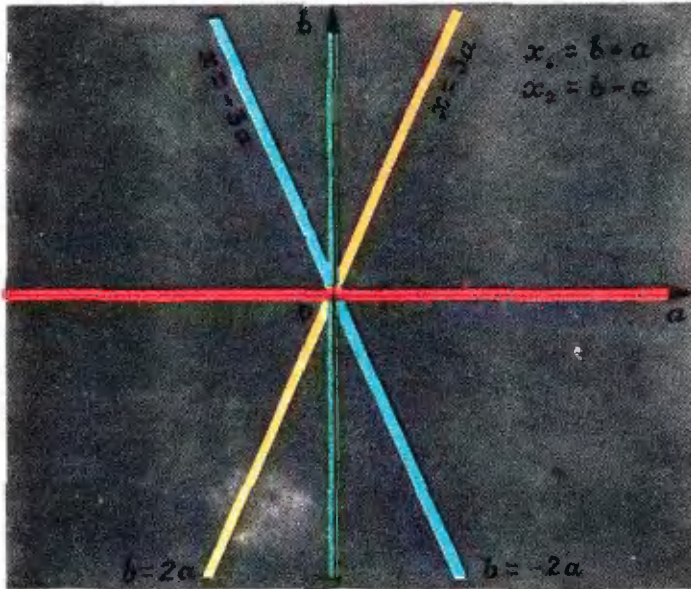


Рис. 1.

$b = -2a$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x = -3a$ (голубая линия на рисунке 1). Пусть $x_2 = a$, то есть $b - a = a$. Это возможно при $b = 2a$.

Но тогда $x_1 = 3a$. Таким образом, если параметры a и b таковы, что $b = 2a$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x = 3a$ (желтая линия).

Подводя итоги, получим следующий ответ:

если $b = 0$, a — любое действительное число, то решений нет;

если $b \neq 0$, $a = 0$, то x — любое действительное число, отличное от нуля;

если $b = -2a$, $b \neq 0$, то $x = -3a$;

если $b = 2a$, $b \neq 0$, то $x = 3a$;

если $a, b \neq 0$, $b \neq \pm 2a$, то $x_1 = b + a$, $x_2 = b - a$.

Пример 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} = a + b. \quad (4)$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$x \leq a^2, \quad x \leq b^2, \quad \text{или} \quad x \leq \min\{a^2; b^2\}.$$

Левая часть уравнения (4) неотрицательна, а потому при $a + b < 0$ данное уравнение не может иметь решений. На рисунке 2 это отмечено тем, что полуплоскость под прямой $b = -a$ окрашена в розовый цвет.

Рассмотрим теперь случай $a + b \geq 0$. После очевидных преобразований получим $\sqrt{(a^2 - x)(b^2 - x)} = ab + x$. Уточним ОДЗ: $x \geq -ab$. Продолжая преобразования, получим

$$x(a + b)^2 = 0 \quad (5)$$

Рассмотрим два случая:

С л у ч а й: $a + b > 0$. Тогда $x = 0$. При этом условия $x \leq a^2$ и $x \leq b^2$ выполняются автоматически, чего нельзя сказать про условие $x \geq -ab$. Если $ab > 0$, то это условие, очевидно, выполнено. Если же $ab < 0$, то $-ab > 0$ и $x = 0 < -ab$. Поэтому на рисунке 2 в зонах II и III (где $a + b > 0$, но $ab < 0$) решений нет. Таким образом, $x = 0$ является корнем

* Этот пример взят из книги Н. П. Антонова др. «Сборник задач по элементарной математике» (М., «Наука», 1969), где он решен неверно.

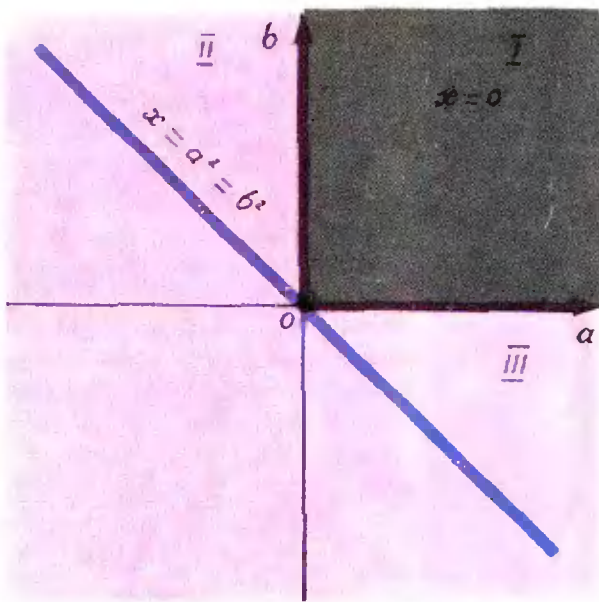


Рис. 2.

но, выполнены. На рисунке 2 этот ответ указан около синей прямой $b = -a$.

Объединяя все полученные результаты, получаем ответ:

если $a + b > 0$ и $ab \geq 0$, то $x = 0$;

если $a + b = 0$, то $x = a^2$;

если $a + b < 0$ или $a + b > 0$ и $ab < 0$, то решений нет.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\lg x + \lg y = a, \quad x + y = b. \quad (6)$$

Решение. Отметим ОДЗ: $x, y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ (здесь и далее $k, l, m, n = 0; \pm 1; \dots$). Преобразуем первое уравнение системы к виду $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = a$ и далее с учетом того, что $x + y = b$, получим

$$a \cos x \cos y = \sin b. \quad (7)$$

Исходный случай: $a = 0$. Он, естественно, распадается на два варианта: 1, а) $a = 0, \sin b = 0$; 1, б) $a = 0, \sin b \neq 0$.

Если $\sin b = 0$, то есть $b = m\pi$, то уравнению (7) удовлетворяют любые пары (x, y) , а системе (6) — любые пары (x, y) , удовлетворяющие следующим условиям:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad x + y = b.$$

Если $\sin b \neq 0$, то есть $b \neq m\pi$, то уравнение (7), а вместе с ним и система (6) не имеют решений.

Исходный случай: $a \neq 0$. Тогда уравнение (7) преобразуется к виду

$$\cos x \cos y = \frac{\sin b}{a} \text{ и, далее,}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{2 \sin b}{a}. \quad (8)$$

Если снова учесть, что $x + y = b$, то уравнение (8) можно переписать так:

$$\cos(x-y) = \frac{2 \sin b}{a} - \cos b. \quad (9)$$

уравнения (4), только если $a + b > 0$ и $ab \geq 0$, то есть для точек первой четверти плоскости параметров, включая и точки ее границы (зона I на рисунке 2).

Исходный случай: $a + b = 0$. В этом случае уравнение (5) обращается в тождество $x \cdot 0 = 0$, но это вовсе не означает, что любое действительное число является корнем исходного уравнения (4) (объясните сами, почему так). При $a + b = 0$ последовательно находим $b = -a$, $b^2 = a^2$, и уравнение (4) принимает вид $2\sqrt{a^2 - x} = 0$, откуда $x = a^2 = b^2$, и все условия при этом, очевид-

Дальнейшие рассуждения зависят от оценки правой части уравнения (9): если $\left| \frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right| > 1$, то уравнение (9), а с ним и система (6) не имеют решений; если же $\left| \frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right| \leq 1$, то

$$x - y = \pm \arccos \left(\frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right) + 2k\pi.$$

Решив последнее уравнение в системе с уравнением $x + y = b$, получаем

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right) + k\pi, \\ y = \frac{b}{2} \mp \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right) - k\pi. \end{cases}$$

Нам остается лишь выяснить, не может ли случиться так, что при некоторых значениях параметров найденные значения x, y совпадут с запрещенными значениями $\frac{\pi}{2} + n\pi$. Нетрудно видеть, что это произойдет в том случае, когда $b \pm \arccos \left(\frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right) = \pi + 2l\pi$. Последнее равенство перепишем так: $\pm \arccos \left(\frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right) = \pi - b + 2l\pi$, и возьмем от обеих частей косинус. Получим

$$\frac{2 \sin b}{a} - \cos b = -\cos b, \quad \sin b = 0, \quad b = m\pi.$$

Итак, если $b = m\pi$ и $a \neq 0$, то система (6) не будет иметь решений. Объединяя все полученные результаты, запишем ответ:

если $a = 0, b = m\pi$, то решением системы (6) служит любая пара (x, y) такая, что $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, x + y = b$;

если $a = 0, b \neq m\pi$, или $a \neq 0, b = m\pi$, то решений нет;

если $a \neq 0, b \neq m\pi$ и $\left| \frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right| \leq 1$, то

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right) + k\pi, \\ y = \frac{b}{2} \mp \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right) - k\pi; \end{cases}$$

если $a \neq 0, b \neq m\pi$, но $\left| \frac{2 \sin b}{a} - \cos b \right| > 1$, то решений нет.

Мы ограничились рассмотрением примеров только с двумя параметрами. Дальнейшее увеличение числа параметров, не давая ничего принципиально нового, приводит лишь к увеличению технических трудностей.

У п р а ж н е н и я

1. Решить следующие уравнения:

а) $a^2 - \frac{a^2 - b^2}{2x - x^2} = \frac{b^2(x + 2)}{x - 2}$;

б) $\frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}} = \frac{a-b}{a+b-2x}$;

в) $\frac{\lg ax}{\sin bx} = 0$.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a^{\lg x} = b^{\lg y}, \\ (bx)^{\lg b} = (ay)^{\lg a}. \end{cases}$$

КАК ПРОВЕРИТЬ ОТВЕТ

Р. Г. Минц

Наверное, у каждого после, казалось бы, исчерпывающего решения задачи иногда возникает ощущение, будто что-то здесь все-таки не так. Подобное состояние особенно естественно, если задача принципиально новая или если решение было громоздким. Как следует поступать в таком случае? Как убедиться хотя бы в том, что ответ не является заведомо неверным? Самый естественный способ самопроверки в подобной ситуации — исследование ответа. Заметим сразу, что для этого не существует универсальной схемы. Можно лишь выделить несколько сравнительно часто встречающихся случаев.

Поэтому наш рассказ построен следующим образом. Прежде всего сформулированы четыре задачи. К каждой задаче дано по три ответа, два из которых неверны. Постараемся, не решая задачи, определить, какой из ответов правильный. В конце статьи приведены решения.

Задача 1. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью v_1 , а вторую — со скоростью v_2 . Чему равна средняя скорость движения автомобиля?

Отв е т ы:

- 1) $v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2}$.
- 2) $v_{\text{ср}} = v_1 + \frac{v_1 v_2}{2(v_1 + v_2)}$.
- 3) $v_{\text{ср}} = 2 \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$.

Первая проверка, которую должен пройти ответ, — это его размерность. Очевидно, что в случае 1) дело обстоит неблагоприятно именно в этом отношении. Ответ имеет размерность обратной скорости $\left(\frac{\text{сек}}{\text{см}}\right)$. Покажем, что неверен и второй ответ. Постараемся понять, в чем дело. Для этого перечи-

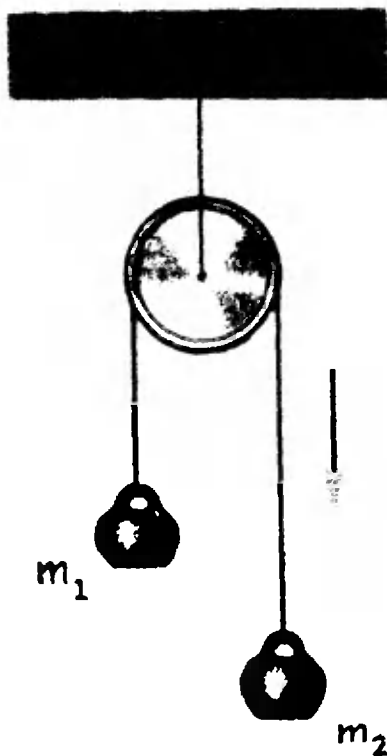


Рис. 1.

таем еще раз условие задачи. Легко видеть, что по отношению к поставленному вопросу скорости v_1 и v_2 равноправны, то есть несущественно, какую именно половину пути автомобиль двигался со скоростью v_1 , а какую со скоростью v_2 . Это означает, что при замене v_1 на v_2 , а v_2 на v_1 ответ не должен изменяться. В таком случае говорят о симметрии относительно v_1 и v_2 . Прделав указанную замену во втором ответе, получаем

$$v_{\text{ср}} = v_2 + \frac{v_1 v_2}{2(v_1 + v_2)} \neq v_1 + \frac{v_1 v_2}{2(v_1 + v_2)}.$$

Таким образом, правильным является третий ответ.

Задача 2. Два груза с массами m_1 и m_2 подвешены на нити, перекинутой через блок (рис. 1). Считая

нить и блок невесомыми и пренебрегая трением, определить ускорение грузов a_1 и a_2 и натяжение нити T .

О т в е т ы: 1) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$;

$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g; \quad T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

2) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1} g; \quad a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1} g$;

$$T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

3) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g; \quad a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$;

$$T = (m_1 + m_2) g.$$

Положительным мы считаем направление, обозначенное на рисунке стрелкой.

Как и в предыдущей задаче, прежде всего проверим размерность. Нетрудно убедиться, что во всех трех случаях правая и левая части каждой формулы имеют одинаковую размерность. После этого можно идти дальше. Обратите внимание на то, что если грузы m_1 и m_2 поменять местами, то натяжение нити не изменится, то есть выражение для силы натяжения должно быть симметрично относительно m_1 и m_2 . Все ответы выдерживают и эту проверку.

Нетрудно увидеть, что во втором случае допущена ошибка. Действительно, ведь грузы m_1 и m_2 висят на одной нити. Значит, если масса m_1 движется с ускорением a_1 , то масса m_2 должна двигаться с ускорением $-a_1$ (кинематическая связь), что не выполняется во втором ответе.

Итак, нам осталось сделать выбор между первым и третьим результатами. Они отличаются лишь формулой для величины натяжения нити. Будем рассуждать так: пусть какая-либо масса, например m_1 , равна нулю. Совершенно очевидно, что в этом случае второй груз свободно падает, и нить не натянута. Этот же результат, конечно, должен получиться и из

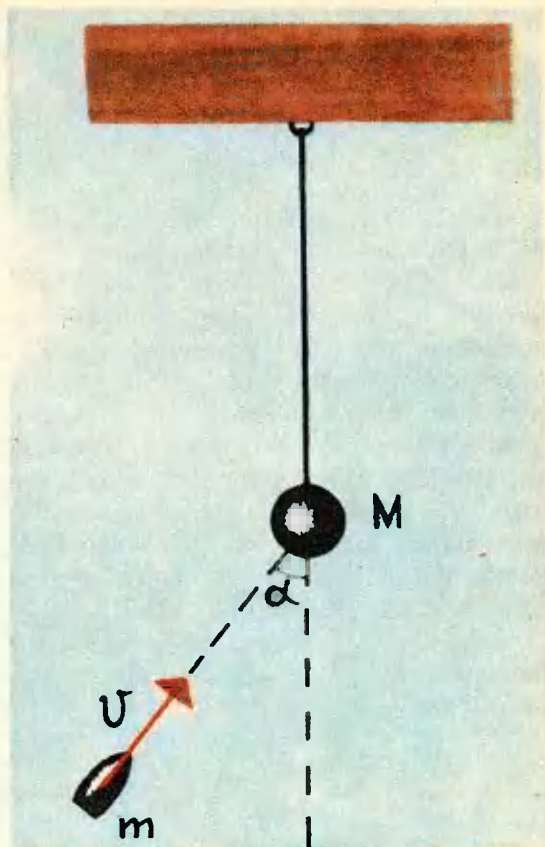


Рис. 2.

правильного ответа, если в него подставить значение $m_1 = 0$. Проведя это, найдем, что $T = m_2 g$ в третьем случае и $T = 0$ в первом. Это означает, что верен первый ответ.

Задача 3. В покоящийся шар массы M , подвешенный шарнирно на несжимаемом стержне, попадает пуля массы m , летевшая со скоростью v под углом α к стержню (рис. 2). Какое количество тепла Q при этом выделится и на какую высоту h , откачнувшись, поднимется шар, если пуля в нем застрянет?

О т в е т ы:

1) $h = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{m+M} \right)^2$;

$$Q = \frac{m v^2}{2} \frac{m \cos^2 \alpha + M}{m + M}.$$

2) $h = \frac{(mv)^2}{2(m+M)}$;

$$Q = \frac{m^2 v^2 \cos^2 \alpha + M^2}{2(m+M)}$$

$$3) h = \cos^2 \alpha \frac{(Mv)^2}{2g(m+M)^2};$$

$$Q = \frac{mv^2}{2} \frac{m \cos^2 \alpha + M}{M}.$$

Первая проверка, как всегда, — размерность. Однако не будем спешить. Как это сделать достаточно быстро и просто? Раскроем небольшой секрет: увидеть размерность соотношения гораздо легче, если предварительно преобразовать его следующим образом: из входящих в формулу параметров нужно постараться выделить безразмерные отношения, причем сделать это так, чтобы оставшаяся размерная комбинация была максимально простой или знакомой.

Именно к такому виду приведен первый ответ. Сделаем подобное преобразование для второго:

$$h = \frac{(mv)^2}{2(m+M)} = \frac{mv^2}{2} \frac{m}{m+M};$$

$$Q = \frac{mv^2}{2(m+M)} \left[\left(\frac{M}{m} \right)^2 + v^2 \cos^2 \alpha \right].$$

Теперь видно, что оба соотношения неверны. В первом случае правая часть имеет размерность энергии, а левая — длины. Во втором случае в скобках стоит сумма размерной $v^2 \cos^2 \alpha$ и безразмерной $\left(\frac{M}{m}\right)^2$ величин, чего также быть не должно. С помощью аналогичного преобразования убедитесь в том, что размерность третьего ответа правильна. К сожалению, в отличие от двух предыдущих задач, в условии отсутствует какая-либо симметрия. Давайте поэтому выделим такое значение какого-либо параметра, при котором ответ очевиден, и проверим, получается ли он из наших формул. Пусть, например, угол $\alpha = 0$. Тогда ясно, что шар не сдвинется, то есть высота подъема h равна нулю, а вся кинетическая энергия нули $\frac{mv^2}{2}$ перешла в тепло. Подставив значение $\alpha = 0$ в первый и третий результаты, получим:

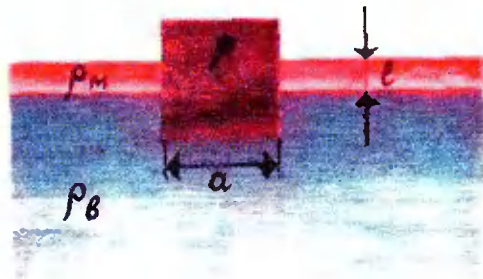


Рис. 3.

$$1) h = 0; \quad Q = \frac{mv^2}{2}.$$

$$3) h = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 \neq 0;$$

$$Q = \frac{mv^2}{2} \frac{m+M}{M} > \frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом, правилен первый ответ.

Отметим еще, что для самопроверки можно использовать ситуации при $m = 0$ или $M \rightarrow \infty$. Попробуйте сделать это сами.

Задача 4. Деревянный кубик со стороной a , плотность которого ρ , плавает в воде. Каким будет изменение глубины погружения кубика Δh , если на воду налить слой масла толщиной l (рис. 3)? Плотность воды и масла ρ_v и ρ_m соответственно.

О т в е т ы:

$$1) \Delta h = \frac{\rho_m - \rho_v}{\rho} (a - l).$$

$$2) \Delta h = \frac{l(\rho_v - \rho_m)}{\rho_v}.$$

$$3) \Delta h = l \frac{\rho_v + \rho_m}{\rho_m}.$$

Сразу видно, что размерность у всех трех ответов правильна, а симметрия в задаче отсутствует.

Попробуем проверить наши ответы на каком-нибудь очевидном случае. Если $l = 0$ (то есть масла отсутствует), то глубина погружения не должна измениться ($\Delta h = 0$). Ясно, что первый ответ, из которого у

случае $l=0$ получается $\Delta h = \frac{\rho_m - \rho_v}{\rho} a$,

неверен.

Рассмотрим теперь другую возможную ситуацию. Допустим, что плотность масла равна плотности воды. Очевидно, что и в этом случае глубина погружения кубика не изменится. Третий ответ, как легко заметить, этому условию не удовлетворяет. Таким образом, правильным является второй ответ.

Теперь, пожалуй, пора подвести некоторые итоги. Как же исследовать ответ?

Мы уже видели, что прежде всего надо убедиться в правильной размерности. Делать это лучше всего в буквенном виде, выделяя соответствующие безразмерные и размерные комбинации.

Следующий шаг состоит в изучении симметрии задачи. Если в условии какие-либо параметры входят равноправно, то и в ответ они должны входить равноправным образом (симметрично). Иногда симметрию задачи легче обнаружить по виду самого ответа. Что имеется в виду? Представьте себе, что исследуемый ответ симметричен относительно каких-то однотипных параметров (например, две массы, две скорости и так далее). Тогда нужно проверить, обладает ли этой же симметрией условие задачи. Если нет, то ответ неверен.

Другой удобный способ проверки состоит в следующем: полученный результат зависит от параметров задачи (например, от массы, начальной скорости, угла, емкости, ...). Постараемся, изменяя какой-либо параметр x , свести задачу к известной или к такой, ответ которой очевиден. Допустим, что это нам удалось и мы знаем правильный ответ при $x = x_0$. Тогда проверка состоит в сравнении этого результата с нашим при $x = x_0$. Заметим, что чаще всего приходится прибегать именно к этому способу проверки. Но для того, чтобы успешно его применять, нужно хорошо понять физическую сторону задачи.

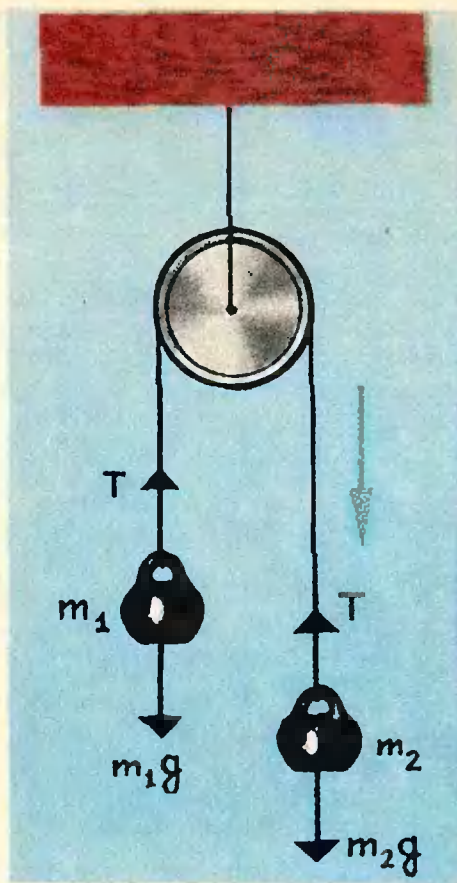


Рис. 4.

Приведем теперь подробное решение предложенных задач.

Задача 1. Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ равна $\frac{S}{t}$, где S — путь, а t — время, за которое этот путь пройден.

$$t = \frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2v_2} = \frac{S(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}.$$

Подставляя это выражение для t в формулу для $v_{\text{ср}}$, получаем

$$v_{\text{ср}} = \frac{S \cdot 2v_1v_2}{S(v_1 + v_2)} = 2 \frac{v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Задача 2. Вследствие того, что нить нерастяжима и невесома, $a_2 = -a_1 = a$ (кинематическая связь) и натяжение нити всюду одно и то же (рис. 4). Запишем уравнение движения грузов:

$$-m_1a = m_1g - T \text{ и } m_2a = m_2g - T.$$

Решая эту систему относительно a и T , найдем

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g, \quad T = 2 \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Задача 3. В начальный момент шар может двигаться лишь горизонтально. Применяя в системе шар — пуля закон сохранения

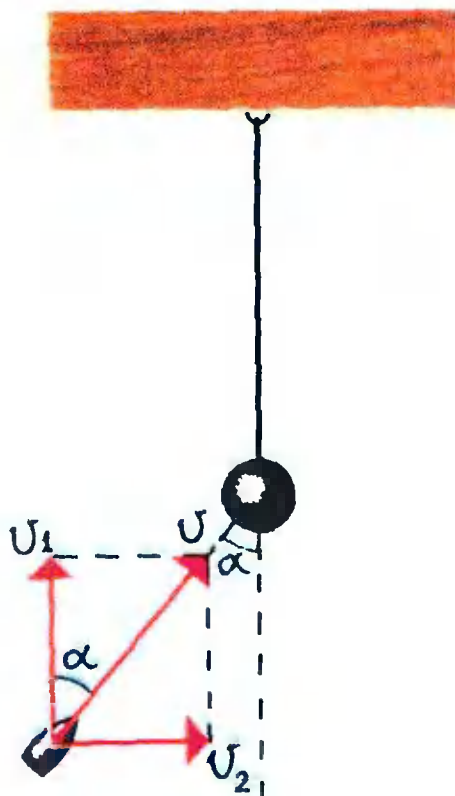


Рис. 5.

ния импульса (количества движения), получим $mu \sin \alpha = (M+m)v'$, где v' — скорость пули и шара сразу после попадания пули в шар (рис. 5).

Из закона сохранения механической энергии следует, что

$$\frac{(M+m)v'^2}{2} = (M+m)gh,$$

откуда

$$h = \frac{v'^2}{2g} \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{M+m} \right)^2.$$

Количество выделившегося тепла равно разности начальной кинетической энергии пули и кинетической энергии шара сразу после попадания пули в шар:

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M)v'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \frac{m \cos^2 \alpha + M}{m+M}.$$

Задача 4. На кубик, погруженный в воду и масло, действует выталкивающая сила $F = \rho_M g l a^2 + \rho_B g x a^2$ (рис. 6). Эта сила должна быть равна силе тяжести, действующей на кубик: $P = \rho a^3$. Приравняв эти два соотношения, получаем $\rho a = \rho_M l + \rho_B x$, откуда глубина погружения $h_1 = x + l = \frac{\rho a}{\rho_B} - \frac{l \rho_M}{\rho_B} + l$. Если масло отсутствует



Рис. 6.

($l=0$), то глубина погружения равна $h_0 = a \frac{\rho}{\rho_B}$. Таким образом, изменение глубины погружения равно

$$\Delta h = h_1 - h_0 = l - l \frac{\rho_M}{\rho_B} = \frac{\rho_B - \rho_M}{\rho_B} l.$$

Попробуйте теперь самостоятельно разобраться, какой из ответов правильный в следующих задачах.

1. Человек массы m находится на носу лодки, которая стоит на воде. Длина лодки L , масса M . Человек переходит на корму. На какое расстояние l и b переместятся лодка и человек относительно берега?

Ответы:

$$1) l = \frac{L}{m+M}, \quad b = \frac{LM}{m(M+m)};$$

$$2) l = \frac{m}{m+M} L, \quad b = \frac{M}{M+m} L;$$

$$3) l = \frac{M}{m+M} L, \quad b = \frac{m}{m+M} L.$$

2. Шар радиуса R и массы m стоит перед ступенькой высоты h (рис. 7). Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к центру шара, чтобы он поднялся на ступеньку?

Ответы:

$$1) F \geq mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h};$$

$$2) F \geq mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R};$$

$$3) F \geq mg \frac{2R-h}{R-h}.$$

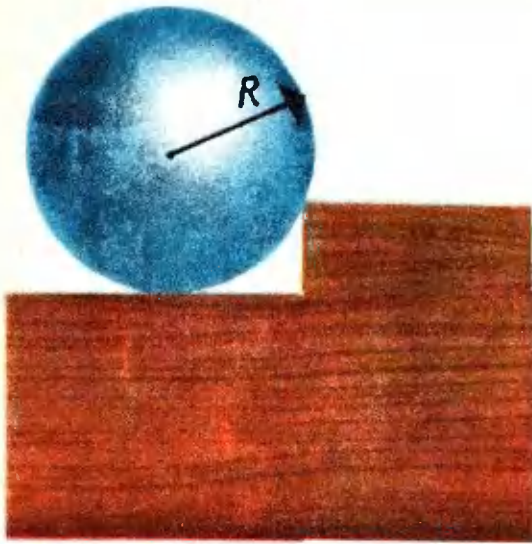


Рис. 7.

3. Тело массы m движется вертикально с ускорением a . Определить, какая сила F действует на тело.

Ответы:

$$1) F = m(g + a); \quad 2) F = m(g - a);$$

$$3) F = m \frac{ga}{g + a}.$$

4. Две линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 составлены вплотную (рис. 8). Определить фокусное расстояние такой системы.

Ответы:

$$1) F = F_1 + F_2;$$

$$2) F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2};$$

$$3) F = \frac{F_1 F_2}{F_1 - F_2}.$$

5. Два заряженных шара радиусов R_1 и R_2 находятся один от другого на расстоянии, много большем их радиусов. Заряды шаров q_1 и q_2 соответственно. Найти заряды q_1' , q_2' и потенциал Φ шаров после того, как их соединили проволокой.

Ответы:

$$1) q_1' = q_1 \frac{R_1}{R_2}; \quad q_2' = q_2 \frac{R_2}{R_1};$$

$$\Phi = \frac{(q_1 - q_2)}{R_1 + R_2}.$$

$$2) q_1' = \frac{(q_1 + q_2) R_1}{R_1 - R_2};$$

$$q_2' = -\frac{(q_1 + q_2) R_2}{R_1 - R_2};$$

$$\Phi = \frac{q_1 + q_2}{R_1 - R_2}.$$

$$3) q_1' = \frac{(q_1 + q_2) R_1}{R_1 + R_2};$$

$$q_2' = \frac{(q_1 + q_2) R_2}{R_1 + R_2};$$

$$\Phi = \frac{q_1 + q_2}{R_1 + R_2}.$$

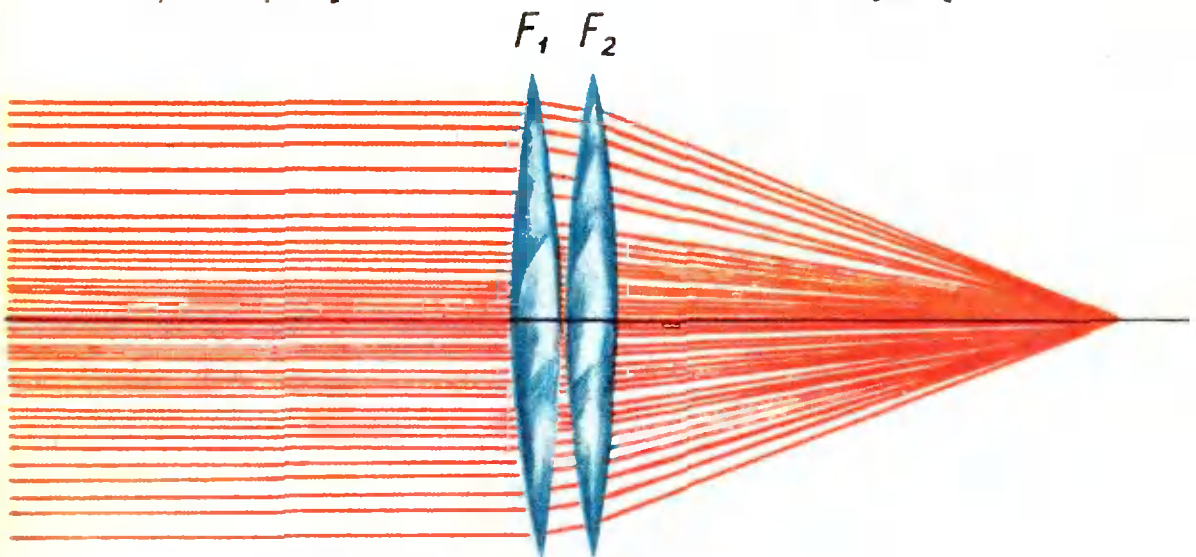


Рис. 8

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задаче «Помогите художнику!»

Ответ. 40 способов. С использованием черного цвета 16 способов.

Действительно, мы можем нарисовать линию белого цвета на черном фоне, или линию черного цвета на белом фоне и в каждом из этих способов подкрасить весь рисунок (и линию, и фон) любой из 8 комбинаций оставшихся цветов (3 основных цвета, каждый либо входит, либо нет, $2^3=8$).

В остальных способах линия и фон должны отличаться ровно на один основной цвет (чтобы не было двух линий).

Получаем 24 способа. Это можно доказать, например, так. Выберем тот основной цвет X , на который отличаются линия и фон; нарисуем белую линию на фоне X или линию цвета X на белом фоне (поскольку основных цветов, кроме черного, три, такой рисунок можно сделать 6 способами). Существует четыре цвета, не содержащих цвета X , а именно: белый, два других основных цвета и один смешанный. Любым из них можно покрыть весь рисунок. Это дает еще $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ способа. А всего 40 способов.

Проверьте, что на обложке переходы цветов от центра концентрических кругов к краю происходят ровно на одном основном цвете.

К статье «Еще раз об уравнениях с параметрами»

1. а) Если $a=b=0$, то x — любое действительное число, отличное от 0 и 2;

если $a=\pm b \neq 0$, то решений нет;

если $a=\pm 3b$, то $x = \frac{1}{2}$;

если $a \neq \pm b, \pm 3b$, то $x_1 = \frac{a+b}{a-b}$,

$$x_2 = \frac{a-b}{a+b}.$$

б) Если $a \leq b$, то решений нет;

если $a > b$, то $x_1 = a$, $x_2 = b$.

в) Если $b=0$, то при любых a решений нет;

если $a=0$, $b \neq 0$, то x — любое число, кроме $\frac{n\pi}{b}$ ($n=0; \pm 1; \dots$);

если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = \frac{k\pi}{a}$, где k — любое целое число, кроме целых чисел, имеющих вид $n \frac{a}{b}$ ($n=0; \pm 1; \dots$).

2. Если $a=b=1$, то решением служит любая пара (x, y) , где $x > 0$, $y > 0$;

если $0 < a=b \neq 1$, то решением служит любая пара (x, y) , где $x=y > 0$;

если $ab=1$, $a \neq 1$, $a > 0$, то решением служит любая пара (x, y) , где $x > 0$, $y = \frac{1}{x}$;

если $a \leq 0$, b — любое число или $b \leq 0$, a — любое, то решений нет,

при остальных значениях (a, b) имеем

$$x = \frac{1}{b}, \quad y = \frac{1}{a}.$$

К статье «Как проверить ответ»

1. Прежде всего проверим размерность предложенных ответов. Видно, что первый ответ имеет неправильную размерность. Для того чтобы выбрать между вторым и третьим ответами, разберем предельный случай $m=0$. Если $m=0$, то очевидно, что лодка должна оставаться на месте. Это не следует из третьего ответа; поэтому правилен второй ответ.

2. Из приведенных формул видно, что все они имеют правильную размерность. Ясно также, что в задаче отсутствует симметрия. Поэтому рассмотрим случай $h=0$ и $h=R$. Если $h=0$, то минимальная сила равна 0. Подставив это значение в неследующие формулы, для третьего случая получаем $F \geq 2mg \neq 0$. Если $h=R$, то никакая сколь угодно большая сила, приложенная к центру, не поднимет шар (рис. 1). Этому условию удовлет-

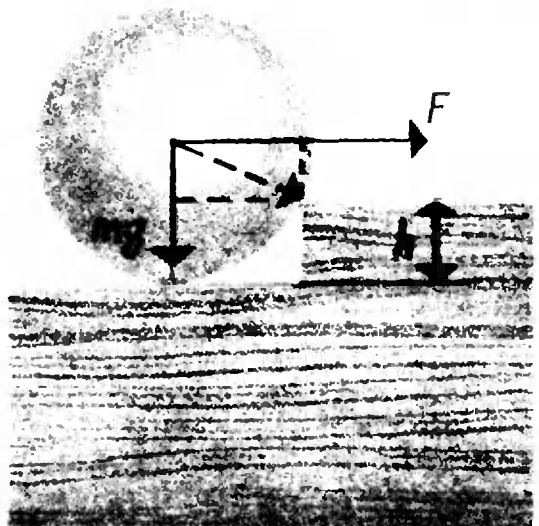


Рис. 1.

воряет лишь первый ответ, который и является правильным. И действительно, при $h \rightarrow R$

$$F_{\min} = mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h} \rightarrow \infty.$$

3. Как и в предыдущем случае, размерность ответов правильная. Поэтому будем рассуждать следующим образом. Если $a=0$, то действующая на тело сила равна его весу. Тогда очевидно, что третий ответ неверен, т. к. $F(a=0)=0$. Если же тело свободно падает, $a=-g$ и действующая на него сила равна 0 (невесомость). Этому условию удовлетворяет первый ответ.

4. Видно, что все три ответа выдерживают проверку на размерность и задача симметрична относительно F_1 и F_2 . Проверьте, что при замене $F_1 \rightarrow F_2$ и $F_2 \rightarrow F_1$ ответы переходят сами в себя.

Рассмотрим случай одинаковых линз. Ясно, что он ничем не выделен. Однако для этого случая в третьем ответе получается бесконечно большое фокусное расстояние. Тем самым, третий результат явно неправильный. Если бы одна линза была просто плоскопараллельной пластинкой (фокусное расстояние плоскопараллельной пластинки $F_{\text{пл}} = \infty$, так как параллельный пучок лучей остается параллельным, то есть собирается в бесконечности), то система фактически состояла бы из одной линзы. Проверим, следует ли это из наших формул: при $F_1 \rightarrow \infty$ мы должны получить, что $F \rightarrow F_2$. Это соотношение действительно получается для второго ответа и несправедливо для первого, то есть правильным является второй ответ.

5. Видно, что размерность всех трех ответов верная. Поэтому для того, чтобы найти, какой из ответов правилен, рассмотрим следующий случай: пусть заряды шаров равны, но противоположны по знаку: $q_1 = -q_2$. Очевидно, что тогда после соединения шары просто разрядятся, то есть их заряды и потенциалы должны обратиться в 0. Этому условию удовлетворяют лишь второй и третий ответы. Для того чтобы выбрать из них правильный, рассмотрим случай, когда шары одинаковые: $R_1 = R_2$. Ясно, что он ничем не выделен. С другой стороны, во втором ответе величина зарядов и потенциал в этом случае обращаются в бесконечность. Таким образом, правильным является третий ответ.

Приведем теперь подробное решение задачи.

1. Количество движения замкнутой системы не меняется, а ее центр масс остается в покое. Поэтому центр масс системы человек — лодка в системе координат, связанной с водой, не изменится при движении человека. Начало отсчета выберем в центре масс. Тогда ясно, что (рис. 2) $l = 2y$ и $b = 2x$.

Для x и y имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{L}{2}, \\ mx = My, \end{cases}$$

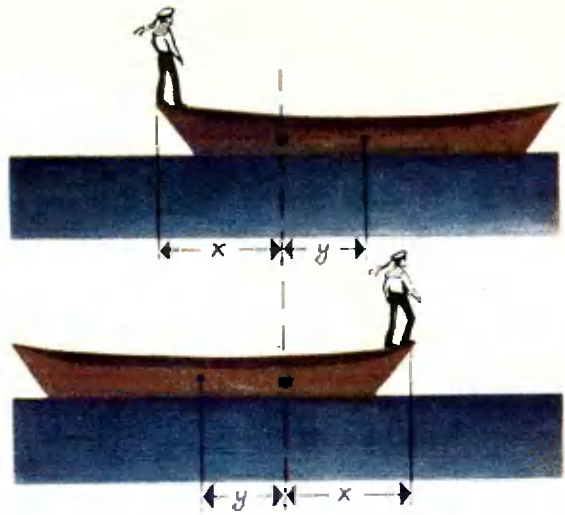


Рис. 2.

откуда получаем

$$x = \frac{L}{2} \frac{M}{m+M}, \quad y = \frac{L}{2} \frac{m}{m+M},$$

$$a = l = L \frac{m}{m+M}, \quad b = L \frac{M}{m+M}.$$

2. Минимальную горизонтальную силу F_1 найдем, приравняв моменты силы F и силы $P = mg$ относительно точки 0. Это дает

$$F(R-h) \geq P \sqrt{R^2 - (R-h)^2},$$

$$F \geq mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

3. Будем считать, что ускорение положительно, если оно направлено вверх. Тогда, в соответствии со вторым законом Ньютона, имеем $ma = F - mg$, откуда $F = m(g+a)$.

4. Пучок лучей, выходящих из фокуса первой линзы, после прохождения не становится параллельным. Пройдя вторую линзу, этот пучок собирается в ее фокусе. Считая, что система эквивалентна линзе с фокусным расстоянием F , мы можем записать

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Отсюда

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}.$$

5. После соединения оба шара имеют один и тот же потенциал φ . Из определения емкости имеем $c_1 = \frac{q_1}{\varphi}$ и $c_2 = \frac{q_2}{\varphi}$; с учетом указания к задаче отсюда следует, что

$$\frac{q_2}{R_2} = \frac{q_1}{R_1}.$$

С другой стороны, $q_1' + q_2' = q_1 + q_2$ (закон сохранения заряда). Таким образом, для определения q_1' , q_2' и φ получается система уравнений

$$\begin{cases} q_1' + q_2' = q_1 + q_2, \\ \frac{q_1'}{R_1} = \frac{q_2'}{R_2}, \\ \varphi = \frac{q_1'}{c_1}. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$q_1' = \frac{(q_1 + q_2) R_1}{R_1 + R_2}; \quad q_2' = \frac{(q_1 + q_2) R_2}{R_1 + R_2};$$

$$\varphi = \frac{q_1 + q_2}{R_1 + R_2}.$$

Разбор «Случая с методом математической индукции» (см. «Квант» № 7, стр. 37)

Положим

$$P_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \quad (n \geq 1).$$

Итак, доказывая методом математической индукции неравенства

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (1)$$

и

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (2)$$

Коля В. столкнулся с любопытным обстоятельством, что индуктивный переход «от n к $n+1$ » в случае (1) легко сводится к проверке соотношения

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}, \quad (3)$$

в то время как в случае (2) аналогичное соотношение

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \quad (4)$$

неверно при любом $n \geq 1$. При этом само неравенство (2) является очевидным следствием неравенства (1)!

Сначала уясним себе, что формального противоречия здесь нет: выполнение соотношения (4) всего лишь достаточно для справедливости (2), но отнюдь не необходимо.

Почему же тем не менее так получается?

Рассмотрим графики функций $y = P_x$ и $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке от $x=n$ до $x=n+1$ (функция $y = P_x$ определена только на концах этого отрезка).

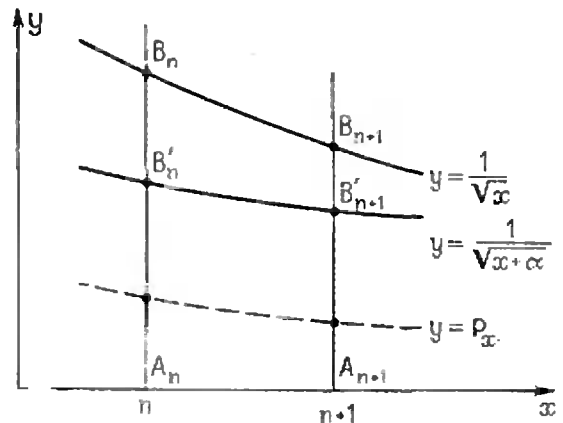


рис. 1.

Пожность соотношения (4) влечет неравенство

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{A_{n+1} B_{n+1}}{A_n B_n}$$

Иными словами, длина отрезка $A_n B_n$ при переходе «от n к $n+1$ » убывает быстрее, чем убывает величина P_n . И это «плохо».

Можно ли так изменить функцию

$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, чтобы скорость этого убывания замедлилась?

Можно. Для этого возьмем, например, функцию $y = \frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}$, где $\alpha > 0$. Действительно, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1} B'_{n+1}}{A_n B'_n} &= \sqrt{\frac{n+\alpha}{n+1+\alpha}} > \\ &> \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{A_{n+1} B_{n+1}}{A_n B_n}. \end{aligned}$$

Коле оказалось достаточно взять $\alpha=1$, чтобы это замедление «сработало»*).

Решим теперь первую задачу: доказать, что

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{3,1n}}. \quad (5)$$

Займемся сразу переходом «от n к $n+1$ ». Переход «в лоб» не удастся. Поэтому заменим правую часть более выгодным выраже-

* Внимательный читатель заметил, на- верно, что здесь не обошлось также и без удачи: удача состояла в том, что функция $\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}$ не только убывает медленнее, чем $\frac{1}{\sqrt{x}}$, но и ближе к ней расположена по отношению к P_x .

ним $\frac{1}{\sqrt{3,1n+\alpha}}$ и подберем величину $\alpha > 0$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\sqrt{3,1n+\alpha}}{\sqrt{3,1(n+1)+\alpha}}, \quad (6)$$

или

$$\alpha \geq \frac{3,1(n+1)}{4n+3}.$$

Правая часть принимает максимальное значение $\frac{3,1 \cdot 2}{7} = 0,885\dots$ при $n=1$ (про-

верьте). Следовательно, при $\alpha = \alpha_0 = \frac{3,1 \cdot 2}{7}$ индуктивный переход сводится к верному соотношению (6).

Остается убедиться, что при $n=1$ вспомогательное неравенство

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{3,1n+\alpha_0}}$$

верно. Кстати, а почему этот способ доказательства не пройдет в случае коэффициента 3,2?

Вместо доказательства второго неравенства

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4}$$

мы лишь укажем, что для успеха индукции правую часть можно заменить выражением вида $A - \frac{B}{n^2}$, и предоставим вам самим найти подходящие коэффициенты A и B .

К статье «О двух действиях с действительными числами» («Квант» № 8, стр. 55)

1. Применить метод математической индукции.

2. Верны. В силу коммутативности «сложения» и «умножения» эти соотношения равносильны приведенным в тексте формулам (2) и (3).

3. $(a \otimes c) \otimes [(a \oplus b) \otimes c]$. Использовать формулу (2) и первую из формул (5).

4. Заданную величину переписать в виде $x \otimes [(a \otimes b) \oplus (a \otimes c)]$. Так как $(a \otimes b) \oplus (a \otimes c) = [a \otimes (a \otimes b)] \oplus c = a \oplus c$ (см. вторую из формул (5)), то, используя еще первую из формул (6), получить окончательное выражение $\min(a, -a, -c)$.

5. Равенство привести к виду $a \oplus b = a \otimes c$, то есть $\max(a, b) = \min(a, -c)$. Это соотношение может иметь место лишь для таких действительных чисел a, b, c , которые удовлетворяют условию $b \leq a \leq -c$.

6. Данное соотношение привести к виду $a \oplus x = b$, или $\max(a, x) = b$. Если $a < b$, то $x = b$; если $a = b$, то можно взять любое $x \leq b$;

если $a > b$, то ни одно действительное число требуемым свойством не обладает.

К задачам из конкурсного отдела журнала «Математика» («Квант» № 8, стр. 57)

1. Допустим, что в городе P приземлится, например, 6 самолетов, вылетевших из A_1, A_2, \dots, A_6 , и представим себе карту государства (рис. 1). Так как расстояние между городами A_1 и A_2 должно быть больше, чем расстояние от каждого из них до города P , то угол A_1PA_2 больше 60° . Аналогично углы $A_2PA_3, A_3PA_4, A_4PA_5, A_5PA_6, A_6PA_1$ больше 60° . Но тогда полный угол около точки P будет превосходить 360° , что невозможно.

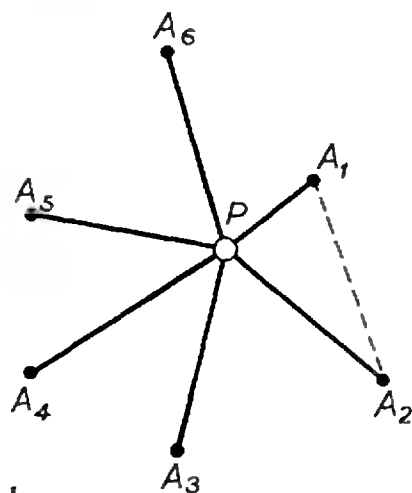


Рис. 1.

2. Достаточно доказать, что $l_a h_a + l_b h_b + l_c h_c \leq p^2$, где h_a, h_b, h_c — длины высот треугольника. Как известно, длина биссектрисы

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)}.$$

Используя неравенство $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, получим $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$. Аналогично $l_b \leq \sqrt{p(p-b)}, l_c \leq \sqrt{p(p-c)}$.

Последние три неравенства и легко доказываемые соотношения $h_a \leq l_a, h_b \leq l_b, h_c \leq l_c$ дают $l_a h_a + l_b h_b + l_c h_c \leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p^2$.

3. Преобразуем исходное уравнение к виду $x^3 \cos^2 x - 2x(x+1) \cos x \sin x + 2(x+1) \sin^2 x = 0$. Умножая левую часть на x и выделяя полный квадрат, приходим к эквивалентному уравнению $[x^2 \cos x - (x+1) \sin x]^2 + (x-1)(x+1) \sin^2 x = 0$. Если действительное число α является корнем этого уравнения и при этом $(\alpha-1) \times (\alpha+1) > 0$, то должны выполняться равенства $\sin^2 \alpha = 0, \alpha^2 \cos \alpha - (\alpha+1) \sin \alpha = 0$, что возможно лишь при $\alpha = 0$, но тогда $(\alpha-1)(\alpha+1) < 0$.

Если же $(\alpha-1)(\alpha+1) \leq 0$, то отсюда сразу следует, что $-1 \leq \alpha \leq 1$. Остается лишь заметить, что значения $x = -1$ и $x = 1$ не являются корнями.

4. Пусть точка O обладает указанным свойством для выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. Легко видеть, что точка O не может лежать ни вне многоугольника, ни на какой-либо его стороне: она должна быть его внутренней точкой.

Пусть P — произвольная точка контура многоугольника. Так как точка O внутренняя, то прямая PO должна пересечь контур многоугольника еще раз; обозначим эту точку пересечения через M . Покажем, что $OP = OM$. Предположим, что $OP > OM$ (в противном случае поменяем обозначения точек). Отразим точку M (и прилегающую к ней часть многоугольника) относительно точки O , получим точку M_1 . Теперь возьмем рядом с точкой M (на контуре многоугольника) точку N и отразим ее относительно точки O , получим точку N_1 . Пусть прямая NO пересекает многоугольник второй раз в точке Q . Потом мы объясним, что значит «рядом». Из рисунка 2 ясно, что площади треугольников OMN и OM_1N_1 равны и меньше площади треугольника OPQ . Но если любая прямая, проведенная через точку O , разбивает многоугольник на две равновеликие части, то площади треугольников OPQ и OMN должны быть равны. Полученное противоречие доказывает, что $OP = OM$ для любых точек P и M многоугольника, лежащих на одной прямой, проходящей через точку O , то есть O — центр симметрии многоугольника.

Все сказанное верно, если можно выбрать точку N так, чтобы M_1N_1 не пересекалось с PQ . Так вот, «рядом» означает, что это условие выполняется. Достаточно, например, отразив многоугольник относительно точки O , найти ближайшую к P точку K пересечения контура многоугольника и отраженной части и выбрать точку Q еще ближе (и уже по точке Q находить N и N_1).

5. Пусть в момент, когда паук начинает преследовать муху, она находится в точке A окружности верхнего основания. Паук начинает движение, как легко убедиться, из точки B окружности нижнего основания, диаметрально противоположной проекции точки A на это основание.

Отметим образующую, проходящую через точку A , «раскатаем» цилиндрическую поверхность по плоской полосе; каждый из равных прямоугольников, например AA_1C_1C , с основанием $2\pi r$ и высотой $8r$ соответствует развертке цилиндра (рис. 3). При этом кратчайшим путем паука будет такая, который при описанном разворачивании цилиндрической поверхности изображается прямой линией. Точка M будет точкой, в которой паук достигнет муху, если $x = BM = AM$.

Если паук преследует муху, то их движение представлено на рисунке 3. Так

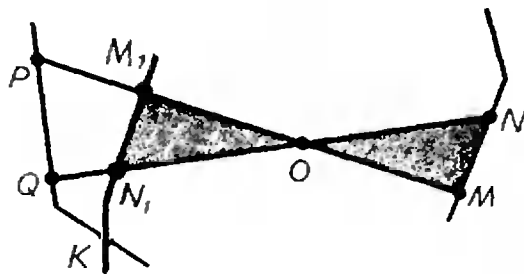


Рис. 2.

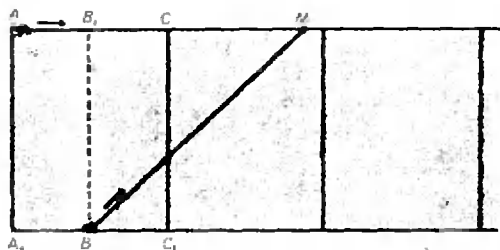


Рис. 3.

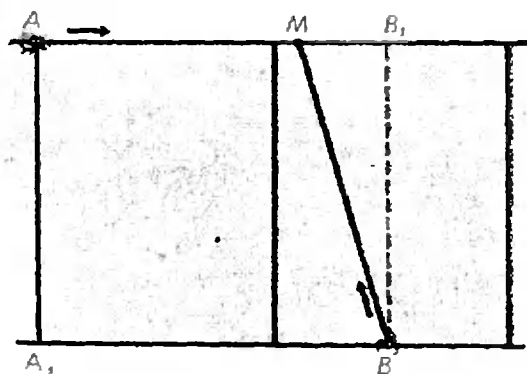


Рис. 4.

как $AB_1 = 2\pi r$, то из прямоугольного треугольника MB_1B находим $x = \frac{64 + \pi^2}{2\pi} r$.

Если паук ползет «навстречу» мухе, то ясно, что за то время, пока муха совершит один оборот по окружности верхнего основания, паук ее не поймает. Посмотрим, может ли он ее настигнуть в течение ее второго оборота. В этом случае их движение представлено на рисунке 4. Так как теперь $MB_1 = 3\pi r - x$, то из прямоугольного треугольника MB_1B находим $x = \frac{64 - 9\pi^2}{6\pi} r$.

Это и есть наиболее выгодный для паука способ погони.



Г. И. КОСУРОВ

В октябре 1970 года редакционная коллегия журнала «Квант» понесла тяжелую утрату. Умер один из инициаторов создания нашего журнала и наиболее активных его сотрудников кандидат физико-математических наук Георгий Иванович Косоуров.

Он родился в Москве 5 января 1921 года. В 1939 году окончил среднюю школу и поступил на физический факультет Московского Государственного университета. В годы Великой Отечественной войны работал механиком в мастерских НИИ Физики МГУ, выполнял различные оборонные заказы. После окончания университета Г. И. Косоуров долгое время был научным сотрудником института физических проблем АН СССР. Затем некоторое время проработал в Морском Гидрофизическом Институте, плавал на экспедиционном судне «Михаил Ломоносов» в Северной Атлантике. Последние годы жизни он был старшим научным сотрудником Института Кристаллографии АН СССР.

По образованию оптик, Г. И. Косоуров работал в различных областях физики. Он занимался разделением изотопов в газовых смесях, физикой твердого тела, оптикой металлов, физикой низких температур и голографией. Человек глубоко оригинальный, тонко чувствующий эксперимент и прекрасно разбирающийся в теории, он внес свой вклад в каждую из этих областей физики.

Одновременно с научной работой Г. И. Косоуров вел активную педагогическую деятельность в Московском физико-техническом институте и физико-математической школе-интернате при МГУ. Он учил молодежь упорству и настойчивости в познании научных истин, воспитывал самостоятельность мышления и умение доводить дело до логического конца — всему тому, что сам он умел делать удивительно хорошо.

Огромная любовь к физике и любовь к детям естественным образом привели его к мысли о необходимости создания нашего журнала, в котором он плодотворно трудился с первых же шагов «Кванта», для которого написал несколько увлекательных статей.

Вся жизнь Георгия Ивановича Косоурова была ярким примером служения науке. Память о нем надолго сохранится в сердцах его многочисленных друзей и учеников.

Редакционная коллегия

НАПЕЧАТАНО В 1970 ГОДУ

Статьи по физике

Азбель М. Я. Закон инерции, гелиоцентрическая система и развитие науки	№ 3
Асламазов Л. Г. Электростатика на языке силовых линий	№ 11
Бронштейн М. П. Как был взвешен атом	№ 2
Дьюрелл К. Алиса в Зазеркалье	№ 8
Каганов М. И., Любарский Г. Я. О трении	№ 12
Капица П. Л. О сверхтекучести жидкого гелия II	№ 10
Карлов Н. В., Прохоров А. М. Лазеры	№ 2
Кикоин И. К. Философские идеи В. И. Ленина и развитие современной физики	№ 4
Кипяток и мороз	№ 5
Копылов Г. И. Энергия и импульс быстрых частиц	№ 3
Коттрэлл А. Х. Природа металлов	№ 7
Левантовский В. И. Размышления по поводу притяжения Земли на полюсе и на экваторе	№ 3
Лишевский В. П. Измерение длины	№ 5
Мякишев Г. Я. Принцип Ферма и законы геометрической оптики	№ 11
Почему устойчив велосипед	№ 12
Розенфельд Б. А. Откуда произошли названия звезд и созвездий	№ 10
Слободецкий И. Ш. Сухое трение	№ 1
Слободецкий И. Ш. О форме дождевой капли	№ 8
Сморodinский Я. А. Рассказ о кванте	№ 1
Сморodinский Я. А., Сурков Е. А. Геометрия столкновений	№ 5
Сморodinский Я. А. Идеальный газ	№ 10
Сморodinский Я. А. О периоде обращения спутников	№ 12
Франк-Каменецкий Д. А. Электрическое сопротивление — квантовое явление	№ 9
Шарвин Ю. В. Закон сохранения магнитного потока	№ 6

Эйиштейн А. Элементарная теория полета и волн на воде	№ 5
----------------------------------------------------------	-----

Статьи по математике

Андреев Е. М. Невписываемые многогранники	№ 8
Башмаков М. И. Паросочетания и транспортные сети	№ 4
Березин В. Н., Смоленский М. Л. Портреты Земли	№ 7
Берколайко С. Т., Катов С. Б. Об одном индуктивном методе доказательства неравенств	№ 8
Бескин Н. М. Цепные дроби	№ 1
Бескин Н. М. Бесконечные цепные дроби	№ 8
Бескин Н. М. Изображение пространственных фигур	№ 12
Болтянский В. Г., Розов Н. Х. Ленинская теория познания и математические понятия	№ 7
Бронштейн И. Н. Эллипс	№ 9
Варпаховский Ф. Л., Колмогоров А. Н. О решении десятой проблемы Гильберта	№ 7
Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Кривые дракона	№ 2
Васильев Н. Б. Метрические пространства	№ 10
Виленкин Н. Я. Тайны бесконечности	№ 3
Гиндикин С. Г. Рассмотрим бесконечную десятичную дробь...	№ 9
Гутер Р. С. Что умеют машины	№ 5
Колмогоров А. Н. Что такое функция	№ 1
Колмогоров А. Н. Что такое график функции	№ 2
Колмогоров А. Н. Паркеты из правильных многоугольников	№ 3
Леонидов Ф. Л. Что можно добавить к названию нашего журнала?	№ 2
Лишевский В. П. Плоский мир Хунтона	№ 4
Николаев Е. Г. Случай с методом математической индукции	№ 7
Разбор «Случая с методом математической индукции»	№ 12
Розенфельд Б. А. Откуда произошли названия геометрических фигур?	№ 1

Розенфельд Б. А. Почему мы так говорим?	№ 3	Бахвалов Н. С., Кузнецов Н. Н. О письменном экзамене на мехмате МГУ в 1969 году	№ 2
Савин А. П. Максимум, минимум и теорема о средних	№ 11	Беломорский М. И. Телевизор — ваш помощник при подготовке в ВУЗ	№ 5
Савин А. П. Цилиндрические шахматы	№ 5	Гольдберг В. В. Вступительные экзамены по математике в Московском институте стали и сплавов 1969 года	№ 6
У нас в гостях журнал «Математика»	№ 8	Дорофеев Г. В. Вступительные экзамены по математике на математическом факультете МПИ им. В. И. Ленина	№ 3
Чимев К. О двух действиях с действительными числами	№ 8	Зайчиков Ю. В. Графики движения	№ 6
Фукс Д. Б., Фукс М. Б. Арифметика биномиальных коэффициентов	№ 6	Кузичев А. С., Успенский В. А. Гуманитарии сдают математику	№ 4
Шашки Э. Ласкера	№ 4	Маргулис А. Я., Радунский Б. А. Геометрический смысл некоторых неравенств с двумя переменными	№ 4
Яглом И. М. Системы счисления	№ 6	Маргулис А. Я., Мордкович А. Г., Радунский Б. А. Внимание! в уравнении — параметр!	№ 9
Математический кружок		Маргулис А. Я., Мордкович А. Г., Радунский Б. А. Решая неравенство с параметром...	№ 10
Башмаков М. И. Геометрические неравенства	№ 2	Маргулис А. Я., Мордкович А. Г., Радунский Б. А. Еще раз об уравнениях с параметрами	№ 12
Бендукидзе А. Д., Сулаквелидзе А. К. Вычисление сумм	№ 9	Милиц Р. Г. Как проверить ответ	№ 12
Виленкин А. Н. Сокращение алгебраических дробей	№ 11	Мордкович А. Г. Кос-что о радикалах	№ 3
Егоров А. А. Сравнения по модулю и арифметика остатков	№ 5	Мордкович А. Г. Кто-то теряет, кто-то находит	№ 5
Лаборатория «Кванта»		Нагаев В. А., Торжков П. Н. Вступительные экзамены по математике в Московском авиационном институте 1969 года	№ 6
Клия М. О. Как вырастить кристалл	№ 5	Письменный экзамен по физике	№ 3
Косоуров Г. И. Кристаллы из шариков	№ 1	Толяни В. А. О приемных экзаменах по математике в технических вузах в 1969 году	№ 5
Косоуров Г. И. Шарик вместо линии	№ 9	Федин Н. Г. Развивайте пространственное воображение	№ 11
Косоуров Г. И. Не верь глазам своим...	№ 10	Олимпиады	
Косоуров Г. И. Оранжевое небо	№ 11	Всесоюзная заочная олимпиада	№ 11
Милиц Н. А. Сколько полюсов у магнита	№ 11	Итоги заключительного тура Всесоюзной олимпиады школьников	№ 5
Хорошавин С. А. Как сделать электростатический генератор	№ 8		
Задачи, решения задач			
Задачник «Кванта»	№№ 1—12		
Решения задач задачника «Кванта»	№№ 7—12		
Задачи для 5 класса	№№ 5—7		
Задачи из конкурсного раздела журнала «Математика»	№ 8		
Решения задач из журнала «Математика»	№ 12		
Тоом А. Л. Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1970 года	№ 6		
Практикум абитуриента			
Баранский К. Н., Устинова А. В. Письменный экзамен по физике на физфаке МГУ	№ 4		

Климов А., Кондра- тьев Н., Черноуцан А. 12 дней в Чехословакии	№ 4
Петраков И. С. 14 дней в Бухаресте	№ 4
Информация	
Гастев Ю. А. Выдающийся результат	№ 3
Идет редакционная почта	№ 6
Колмогоров А. Н., Гу- сев В. А., Егоров А. А., Сурков Е. Л. Физико-математические шко- лы-интернаты	№ 1
Ленинградская школа-интернат при ЛГУ	№ 4
Лешковцев В. А. Государственные премии 1969 года	№ 2
Лешковцев В. А. Ленинские премии 1970 года	№ 8
ММТ (Московский математи- ческий техникум)	№ 6
Орлов А. А., Розен- таль А. Л. Вечерняя математическая школа	№ 3
Работ Ж. М. Заочная математическая школа	№ 1
Уголок коллекционера	№ № 9, 10, 12
Рецензии, библиография	
Березин В. Н., Смо- лянский М. Л. Серьезно + популярно	№ 4
Все, чем занимаются математики	№ 6
Косоуров Г. И. Познакомьтесь со звездным небом	№ 9
Лешковцев В. А. Над чем думают физики	№ 1
Лешковцев В. А. Что мы знаем и чего не знаем о гравитации	№ 7
Розов Н. Х. Как решать задачу?	№ 2
Свет Д. Я. Введение в электронику	№ 2
Смолянский М. Л. Учебное пособие «Математи- ческий анализ»	№ 5
Хренов Л. С. История календаря и хроноло- гия	№ 11
Хрусталева А. Ф. Такая ли помощь нужна посту- пающим?	№ 11

Поправки

(продолжение, см. стр. 30)

Стр. 40, правая колонка, задача
3 а)

$$\sum_{k=1}^n k^3.$$

Стр. 63, левая колонка, задачи

1 б) $\frac{n}{2(3n+2)}$;

1 е) $\frac{\sin(n+1)x - \sin x}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

Стр. 64, левая колонка, 3 стро-
ка сверху:

$$+ b_1 d \frac{(n-1)q^{n+1} - nq^n + q}{(q-1)^2}.$$

«Квант» № 10

Стр. 18, 16 строка снизу. (8) от-
носится к расстоянию

$$\rho(f_1, f_2) = s(f_1, f_2).$$

Стр. 19, 18 строка сверху: ... с
 M_n .

Стр. 63, левая колонка, 5 строка
сверху: если $a > -3$, то

$$\frac{-4}{a+3} < x < \frac{14}{a+3};$$

7—9 строки сверху: если $a \leq 0$, то
 $x \geq 1$; если $0 < a < 1$, то

$$1 \leq x < \left(\frac{1+a^2}{2a} \right)^2.$$

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА



Александр Степанович Попов (1859—1905) — выдающийся русский физик, изобретатель радио. Ему посвящен ряд почтовых марок. Первые две марки с его портретами (по рисунку художника Н. Качура), приведенные на фотографии, вышли в октябре 1925 г. к 20-летию со дня смерти ученого. В декабре 1927 г. на одной из этих марок была сделана надпечатка «8 коп.».

В 1945 г. отмечалось 50-летие со дня изобретения радио А. С. Поповым. В честь этого события была выпущена (июль 1945 г.) серия из трех марок (рисунки художника И. Дубасова). На двух из них Попов изображен у изобретенного им в

1895 г. первого в мире радиоприемника, а на третьей воспроизведен его портрет.

В 1949 г. ко дню радио (по рисункам художника И. Дубасова) выпускаются три марки. На двух из них А. С. Попов изображен на фоне изобретенного им в 1895 г. радиоприемника, а на третьей — он демонстрирует адмиралу С. О. Макарову первую в мире радиоустановку (рисунок по картине художника И. С. Сорочкина).

В 1955 г. отмечалось 60-летие изобретения радиотелеграфа А. С. Поповым. В ознаменование этого события были выпущены две марки с портретами А. С. Попова (по рисункам И. Дубасова).

Две марки выпускаются к 100-летию со дня рождения А. С. Попова (одна по рисунку Н. Круглова, другая по рисунку С. Новского). На первой из них кроме портрета А. С. Попова изображен эпизод спасения рыбаков в Балтийском море.

На второй марке также изображен портрет А. С. Попова и Московская радиомачта, которая излучает радиоволны, несущие слово «МИР» на разных языках.

Марки, посвященные А. С. Попову, выпускались не только в Советском Союзе, но и за рубежом. На фото приведены марки с портретами А. С. Попова, выпущенные в Болгарии, Чехословакии и Румынии.

Отдел ведет А. В. Алтыкис

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 12